# 目　录

# 第一章　行　列　式

## §1. 二阶和三阶行列式

计算下列行列式:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$.　2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.　3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$.　4. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.　6. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$.　7. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.　9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.　11. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.　15. $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \dfrac{2t}{1-t^2} & \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$.　17. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

计算下列行列式($i=\sqrt{-1}$):

18. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$.　19. $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\sin\alpha \end{vmatrix}$.　21. $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

利用行列式解下列方程组:

22. $2x+5y=1,$
$3x+7y=2.$

23. $2x-3y=4,$
$4x-5y=10.$

24. $5x-7y=1,$
$x-2y=0.$

25. $4x+7y+13=0,$
$5x+8y+14=0.$

26. $x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos\beta,$
$x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin\beta.$

27. $x\tan\alpha+y=\sin(\alpha+\beta),$
$x-y\tan\alpha=\cos(\alpha+\beta),$

其中 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k$ 是整数).

研究下面所给定的方程组是否为有定的(有唯一解), 不定的(有无穷多解), 或者矛盾的(没有解):

28. $4x+6y=2,$
$6x+9y=3.$

此时用 Cramer 公式能否给出正确的回答?

29. $3x-2y=2,$
$6x-4y=3.$

30. $(a-b)x=b-c.$

31. $x\sin\alpha=1+\sin\alpha.$

32. $x\sin\alpha=1+\cos\alpha.$

33. $x\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta.$

34. $a^2x=ab,$
$abx=b^2.$

35. $ax+by=ad,$
$bx+cy=bd.$

36. $ax+4y=2,$
$9x+ay=3.$

37. $ax-9y=6,$
$10x-by=10.$

38. 证明: 二阶行列式等于零的必要充分条件是它的行成比例. 对于列, 上述断言也正确(如果这行列式的某些元素等于零, 则成比例一语理解成: 一行的元素由另一行的对应元素乘上同一

个可以等于零的数而得到）.

39*. 证明：对于实数 $a$, $b$, $c$, 方程 $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix}=0$ 的根是实数.

40*. 证明：复系数二次三项式 $ax^2+bx+c$, 当且仅当

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=0$$

时，是完全平方.

41. 证明：对于实数 $a, b, c, d$, 方程

$$\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix}=0$$

的根是实数.

42*. 证明：分式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的值，此处数 $c$ 和 $d$ 至少有一个不为零，当且仅当 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$ 时与 $x$ 的值无关.

计算下列三阶行列式：

43. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.　44. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.　45. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

46. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.　47. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.　48. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

49. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.　50. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.　51. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

52. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.　53. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$.　54. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$.

55. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. 56. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$. 57. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

58. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$. 59. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$. 60. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

61. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

62. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

63. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

64. 在怎样的条件下下列等式成立:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

65. 证明: 行列式

$$\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

以及由此将元素 $a, b, c$ 和 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 循环排列所得到的另外两个行列式都等于零, 其中 $a, b, c$ 是三角形的边长, 而 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 分别是边 $a, b, c$ 的对角.

计算以下三阶行列式, 其中 $i=\sqrt{-1}$:

66. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$.  67. $\begin{vmatrix} x & a+bi & c+di \\ a-bi & y & e+fi \\ c-di & e-fi & z \end{vmatrix}$.

68. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$，其中 $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

69. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$，  其中  $\varepsilon=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$.

70. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$，  其中  $\varepsilon=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$.

71. 证明：如果一个三阶行列式的所有元素等于±1，则该行列式是偶数.

72*. 求三阶行列式可取到的最大值，条件是它的所有元素等于±1.

73*. 求三阶行列式的最大值，条件是它的元素等于−1或0.

利用行列式解下列方程组：

74. $2x+3y+5z=10,$
$3x+7y+4z=3,$
$x+2y+2z=3.$

75. $5x-6y+4z=3,$
$3x-3y+2z=1,$
$4x-5y+2z=1.$

76. $4x-3y+2z+4=0,$
$6x-2y+3z+1=0,$
$5x-3y+2z+3=0.$

77. $5x+2y+3z+2=0,$
$2x-2y+5z=0,$
$3x+4y+2z+10=0.$

78*. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+2=0,$
$-\frac{2y}{b}+\frac{3z}{c}-1=0,$

79. $2ax-3by+cz=0,$
$3ax-6by+5cz=2abc,$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0.\qquad 5ax-4by+2cz=3abc,$$

其中 $abc\neq 0$.

80*. $4bcx+acy-2abz=0,$

$5bcx+3acy-4abz+abc=0,$

$3bcx+2acy-abz-4abc=0\ (abc\neq 0).$

81*. 解方程组:

$x+y+z=a,$

$x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z=b,$　　其中 $\varepsilon$ 是 $\sqrt[3]{1}$ 的异于 1 的值.

$x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z=c,$

研究下列各方程组：是有定的，不定的或是矛盾的.

82. $2x-3y+z=2,$
$3x-5y+5z=3,$
$5x-8y+6z=5.$

83. $4x+3y+2z=1,$
$x+3y+5z=1,$
$3x+6y+9z=2.$

84. $5x-6y+z=4,$
$3x-5y-2z=3,$
$2x-y+3z=5.$

85. $2x-y+3z=4,$
$3x-2y+2z=3,$
$5x-4y=2.$

86. $2ax-23y+29z=4,$
$7x+ay+4z=7,$
$5x+2y+az=5.$

87. $ax-3y+5z=4,$
$x-ay+3z=2,$
$9x-7y+8az=0.$

88. $ax+4y+z=0,$
$2y+3z-1=0,$
$3x-bz+2=0.$

89. $ax-2z=2,$
$5x+2y=1,$
$x-2y+bz=3.$

利用三角形规则直接计算，或者利用 Sarrus 法则，证明三阶行列式的下列性质:

90. 如果在三阶行列式中调换行和列(即如通常所说，转置它的矩阵)，则行列式不变.

91. 如果某一行(或某一列)的所有元素等于零，则行列式等于零.

92. 如果行列式的某一行(或某一列)的所有元素都乘以同一数，则整个行列式也乘以这个数.

93. 如果交换行列式的两行(或交换两列)，则行列式变号.

94. 如果行列式的两行相同(或两列相同)，则行列式等于零.

95. 如果一行的所有元素与另一行的对应元素成比例，则行列式等于零(对列的情形也有同样结论).

96. 如果行列式某行的每一个元素表为两个加项的和的形式，则该行列式等于两个行列式之和，这两个行列式除该行之外的所有其他行的元素都与原行列式一样，而和中第一个行列式该行的元素由第一个加项组成，第二个行列式该行的元素由第二个加项组成(对列的情况结论也正确).

97. 如果将一行的元素乘以同一数加到另一行相应元素上去，则行列式不变(对列也有同样结论).

98. 称行列式的某一行是其他行的线性组合，如果这行的每一元素等于其余各行相应元素与某些数的乘积之和，并且这些乘数对每一行而言是常数，亦即与元素在行中的位置无关. 类似地定义列的线性组合. 例如，行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的第三行是前两行的线性组合，如果存在两个数 $c_1$ 和 $c_2$，使有

$$a_{3j}=c_1a_{1j}+c_2a_{2j} \qquad (j=1, 2, 3).$$

证明：如果三阶行列式的某一行(或列)是其余两行(或列)的线性组合，则行列式等于零.

注. 逆命题也正确，但推出它需要行列式的进一步的理论.

99*. 利用上题举例说明，与二阶行列式不同（参看习题 38），两行（或列）成比例已经不是三阶行列式等于零的必要条件.

利用在习题 91—98 中指出的三阶行列式的性质，计算下列行列式：

100. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.　　101. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

102. $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$.　　103. $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$.

104. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$.　　105. $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$.

106. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$，其中 $\varepsilon$ 是 $\sqrt[3]{1}$ 的异于 1 的值.

107. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

108. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 i & a_1 i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 i & a_2 i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 i & a_3 i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$.

109. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}$（给出所得结果的几何说明）.

110*. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$，其中 $\alpha, \beta, \gamma$ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根.

不展开行列式而证明下列恒等式:

111. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

112. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

113. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

114. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

115. $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

116. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

117. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

118. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b).$$

119. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(b-a)(c-a) \times (c-b).$$

120*. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

121. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

122. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

## §2. 排列和置换

确定以下排列的反序数(如果没有特别声明,则总是把增加次序的位置 1, 2, 3, …作为初始位置):

123. 2, 3, 5, 4, 1.

124. 6, 3, 1, 2, 5, 4.

125. 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.

126. 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2.

127. $1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \cdots, 2n$.

128. $2, 4, 6, \cdots, 2n, 1, 3, 5, \cdots, 2n-1$.

在下面的排列中确定反序数并指出: $n$ 取哪些数这排列是偶排列, $n$取哪些数它是奇排列:

129. $1, 4, 7, \cdots, 3n-2, 2, 5, 8, \cdots, 3n-1, 3, 6, 9, \cdots, 3n$.

130. $3, 6, 9, \cdots, 3n, 2, 5, 8, \cdots, 3n-1, 1, 4, 7, \cdots, 3n-2$.

131. $2, 5, 8, \cdots, 3n-1, 3, 6, 9, \cdots, 3n, 1, 4, 7, \cdots, 3n-2$.

132. $2, 5, 8, \cdots, 3n-1, 1, 4, 7, \cdots, 3n-2, 3, 6, 9, \cdots, 3n$.

133. $1, 5, \cdots, 4n-3, 2, 6, \cdots, 4n-2, 3, 7, \cdots, 4n-1, 4, 8, \cdots, 4n$.

134. $1, 5, \cdots, 4n-3, 3, 7, \cdots, 4n-1, 2, 6, \cdots, 4n-2, 4,$

$8, \cdots, 4n$.

135. $4n, 4n-4, \cdots, 8, 4, 4n-1, 4n-5, \cdots, 7, 3, 4n-2, 4n-6, \cdots, 6, 2, 4n-3, 4n-7, \cdots, 5, 1$.

136. 在数 $1, 2, \cdots, n$ 怎样的排列中反序数最大，它等于多少？

137. 位于排列中第 $k$ 个位置的数 1 作成多少个反序？

138. 在数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的一个排列中，位于第 $k$ 个位置的数 $n$ 作成多少个反序？

139. 在数 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列中，反序数和正序数的和等于多少？

140. 对怎样的 $n$，反序数和正序数的奇偶性在数 $1, 2, \cdots, n$ 的一切排列中都是相同的，又对怎样的 $n$，奇偶性是不同的？

141*. 证明：排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的反序数等于下标 $1, 2, \cdots, n$ 的如下一个排列——用初始位置代替上述给定排列时所得到的下标排列——中的反序数.

142*. 证明：由一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 变为这些元素的另一排列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，可用不多于 $n-1$ 个对换来完成.

143*. 举出数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列的例子，要求用少于 $n-1$ 个对换不可能把所举出的排列变到标准位置，并证明这点.

144*. 证明：从一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 变到这些元素的任一其他排列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，可以用不多于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个邻接对换（即相邻元素的对换）来完成.

145*. 已知排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的反序数等于 $k$，问：在排列 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ 中有多少个反序？

146*. 在 $n$ 个元素的所有排列中，一共有多少个反序？

147*. 证明：数 $1, 2, \cdots, n$ 的包含 $k$ 个反序的任一排列，可以用 $k$ 个邻接对换变为初始位置，但用更少的邻接对换则不可能.

148*. 证明：对任何整数 $k(0\leqslant k\leqslant C_n^2)$，存在数 1, 2, …, $n$ 的一个排列，此排列的反序数等于 $k$.

149*. 用 $(n,k)$ 表示数 1, 2, …, $n$ 的包含 $k$ 个反序的排列的数目. 导出关于数 $(n,k)$ 的递推关系式：

$$(n+1,k)=(n,k)+(n,k-1)+(n,k-2)+\cdots+(n,k-n),$$

此处，如果 $j>C_n^2$ 和 $j<0$，需令 $(n,j)=0$. 利用这个关系式，对 $n=1,2,3,4,5,6$ 和 $k=0,1,2,\cdots,15$ 造出数 $(n,k)$ 的表.

150*. 证明：在数 1, 2, …, $n$ 的全部排列中，包含 $k$ 个反序的排列的数目等于包含 $C_n^2-k$ 个反序的排列的数目.

把下列置换分解成独立轮换之积，并按减量（即事实上被移动的元素数与轮换数之差）确定它的奇偶性. 为计算减量的方便可以对保持原地不动的数在分解式中引进一项轮换①.

151. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}$.　　152. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&1&4&2&3\end{pmatrix}$.

153. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&3&6&5&7&4&2\end{pmatrix}$.　　154. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&8&9&2&1&4&3&6&7\end{pmatrix}$.

155. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&4&5&6&7&8&9&1\end{pmatrix}$.

156. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\end{pmatrix}$.

157. $\begin{pmatrix}1,2,3,4,\cdots,2n-1, & 2n\\2,1,4,3,\cdots,\quad 2n, & 2n-1\end{pmatrix}$.

158. $\begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6,\cdots,3n-2,3n-1, & 3n\\3,2,1,6,5,4,\cdots,\quad 3n,\quad 3n-1, & 3n-2\end{pmatrix}$.

---

① 后一句话的意思是：利用判数，因为判数等于减量——译注.

159. $\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4, \cdots, 2n-3, 2n-2, 2n-1, 2n\\ 3, 4, 5, 6, \cdots, 2n-1, \quad 2n, \quad 1, \quad 2\end{pmatrix}$.

160. $\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, 3n-2, 3n-1, \quad 3n\\ 2, 3, 1, 5, 6, 4, \cdots, 3n-1, \quad 3n, \quad 3n-2\end{pmatrix}$.

161. $\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, 3n-2, 3n-1, 3n\\ 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots, \quad 1, \quad 2, \quad 3\end{pmatrix}$.

162. $\begin{pmatrix}1, \quad 2, \cdots, \quad k, \cdots, nk-k+1, nk-k+2, \cdots, nk\\ k+1, k+2, \cdots, 2k, \cdots, \quad 1, \quad 2, \quad \cdots, k\end{pmatrix}$.

在下列的置换中，把轮换的记法改为两行的记法：

163. $(1\ 5)(2\ 3\ 4)$. 164. $(1\ 3)(2\ 5)(4)$.

165. $(7\ 5\ 3\ 1)(2\ 4\ 6)(8)(9)$.

166. $(1\ 2)(3\ 4)\cdots(2n-1, 2n)$.

167. $(1\ 2\ 3\ 4\cdots 2n-1, 2n)$.

168. $(3\ 2\ 1)(6\ 5\ 4)\cdots(3n, 3n-1, 3n-2)$.

将下列置换相乘：

169. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

170. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

172. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}^2$ 173. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}^3$

174. 证明：如果轮换的某次幂等于单位置换(即恒等置换)，则幂指数可被轮换的长除尽(轮换的元素数称为它的长).

175. 证明：在置换的所有使其等于单位置换的幂中，最小的指数等于含于置换分解式中的各轮换长的最小公倍数.

176*. 求 $A^{100}$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8\end{pmatrix}.$$

177. 求 $A^{150}$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2\end{pmatrix}.$$

178. 从等式 $AXB=C$ 中求出置换 $X$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2\end{pmatrix}.$$

179. 证明：用对换(即二项轮换) $(\alpha,\beta)$ 左乘置换等价于在置换的上面一行中将数 $\alpha$ 和 $\beta$ 对换(即交换)，而用同一对换右乘置换则等价于在置换的下面一行中将 $\alpha$ 和 $\beta$ 对换.

180. 证明，如果数 $\alpha$ 和 $\beta$ 含于置换的一个轮换中，则当用对换 $(\alpha,\beta)$ 乘(左乘或者右乘)这置换时，该轮换分裂成两个轮换；而如果数 $\alpha$ 和 $\beta$ 含于不同的两个轮换中，则当进行上述乘法时，这两个轮换合并为一个轮换.

181*. 利用上面两题，证明：任一置换的反序数和减量有同样的奇偶性.

182*. 证明：把给定置换分解成对换的乘积时，这种分解式中对换的最少个数等于置换的减量.

183*. 证明：把排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 变为这些元素的另一排列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所进行对换的最少个数等于置换

$$P=\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & \cdots, & a_n\\ b_1, & b_2, & \cdots, & b_n\end{pmatrix}$$

的减量.

184*. 求与置换

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

可交换的数 1, 2, 3, 4 的一切置换.

185. 求与置换

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

可交换的数 1, 2, 3, 4, 5 的一切置换.

186*. 对任何整数 $x$ 和 $m$, 其中 $m\neq 0$, 用 $r(x, m)$ 表示以 $m$ 除 $x$ 的余数(取为非负). 证明: 如果 $m\geqslant 2$, 而 $a$ 是与 $m$ 互素的整数, 则对应 $x\to r(ax, m)$, $x=1, 2, \cdots, m-1$ 是数 $1, 2, \cdots, m-1$ 的一个置换.

187. 写出数 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的一个置换, 使此置换把数 $x$ 变为 $5x$ 除以 9 的余数.

## §3. 任何阶行列式的定义和最简单性质

本节习题的目的, 是阐明任何阶行列式的概念和它的最简单性质, 其中包括行线性相关的行列式等于零以及按行展开行列式等性质.

发展计算数值元素行列式技巧的习题、计算特殊形式行列式的方法的习题、有关拉普拉斯定理的习题、行列式乘法的习题安排在以后各节.

查明下列乘积哪些包含于相应阶数的行列式中并带有怎样的符号:

188. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$. 189. $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

190. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$. 191. $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

192. $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1\leqslant k\leqslant n$.

193. $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$.

194. $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\cdots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$.

195. $a_{11}a_{2,n}a_{3,n-1}\cdots a_{n,2}$.

196. $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}\cdots a_{3n-2,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,3n-2}$.

197. 选取 $i$ 和 $k$ 的值，使得乘积

$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$

含于 6 阶行列式且带有负号.

198. 选取 $i$ 和 $k$ 的值，使得乘积

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

含于 7 阶行列式中且带有正号.

199. 求出四阶行列式的那些包含元素 $a_{32}$ 且带正号的项.

200. 求出行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

包含 $x^4$ 和 $x^3$ 的项.

201. $n$ 阶行列式主对角线元素的乘积有怎样的正负号?

202. $n$ 阶行列式次对角线元素的乘积有怎样的正负号?

203. 只利用行列式的定义，计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中主对角线一侧的元素全为零.

204. 只利用行列式的定义，计算

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中次对角线一侧的元素全部等于零.

205. 仅利用行列式的定义，计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

206. 证明：如果在 $n$ 阶行列式中，处于某 $k$ 行和某 $l$ 列交叉处的各元素等于零，并且 $k+l>n$，则这个行列式等于零.

207*. 解方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是不相同的数.

208. 解方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

209. 在 $n$ 阶行列式中，求关于次对角线与元素 $a_{ik}$ 对称的元素.

210. 在 $n$ 阶行列式中，求出关于行列式“中心”与元素 $a_{ik}$ 对称的元素.

211. 我们称行列式的元素$a_{ik}$的位置为偶的或奇的，视和$i+k$为偶数或奇数而定. 求出 $n$ 阶行列式位于偶位置和奇位置的元素个数.

212. 在 $n$ 阶行列式中，如果把第一列移到最后，而其余各列保持原来次序向左移动，问行列式如何变化？

213. 在 $n$ 阶行列式中，如果把它的行写在相反的次序上，问行列式如何变化？

214. 如果在行列式中，每一个元素用关于行列式“中心”对称的元素来替换，问行列式如何变化？

215*. 如果每一个元素用关于次对角线对称的元素替换，问行列式如何变化？

216*. 行列式称为**斜对称的**，如果关于主对角线对称的元素只是正负号不同，亦即对任何下标 $i, k$，有 $a_{ik}=-a_{ki}$.

证明：奇数 $n$ 阶的斜对称行列式等于零.

217*. 证明：如果行列式关于主对角线对称的元素是共轭复数(实数是它的特殊情形)，则行列式是实数.

218. 对怎样的 $n$，元素满足条件

(α) $a_{jk}$ 是实数，当 $j>k$,

(β) $a_{kj}=ia_{jk}$，当 $j\geqslant k(i=\sqrt{-1})$的 $n$ 阶的所有行列式是实数？

219. 对怎样的 $n$，元素满足上题条件(α)和(β)的 $n$ 阶的所有行列式是纯虚数？

220. 证明：对奇数 $n$，元素满足第 218 题条件(α)和(β)的 $n$

阶的所有行列式具有形式 $a(1\pm i)$，其中 $a$ 是实数.

221. 如果所有的元素变号，问 $n$ 阶行列式如何变化？

222*. 如果每一个元素 $a_{ik}$ 乘以 $c^{i-k}$，此处 $c\neq0$，问行列式如何变化？

223*. 证明：如果行列式是偶数阶的，则行列式的每一项包含偶数个奇位置的元素、偶数个偶位置的元素；如果行列式是奇数阶的，则每一项包含偶数个奇位置的元素、奇数个偶位置的元素.

224*. 证明：如果改变奇位置所有元素的符号（正负号），则行列式不变；如果改变偶位置所有元素的符号，则当行列式是偶数阶时行列式不变，是奇数阶时行列式变号.

225. 证明：如果除最后一行外，对每一行都加上后面相继的一行，则行列式不变.

226. 证明：如果从第二列开始，每一列都加上它前面的一列，则行列式不变.

227. 证明：如果除最后一行外，从每一行减去它后面的所有行，则行列式不变.

228. 证明：如果从第二列开始，每一列加上它前面的所有列，则行列式不变.

229. 如果除最后一行外，从每一行减去后面的一行，而从最后一行减去原先的第一行，问行列式如何变化？

230*. 如果对从第二列开始的每一列加上它前面的一列，同时对第一列加上最后面的一列，问行列式如何变化？

231. 如果把 $n$ 阶行列式的矩阵绕"中心"转 $90°$，问行列式如何变化？

232. 如果在行列式中，偶数号码各行的和等于奇数号码各行的和，问行列式等于什么？

233. 求 $n\geqslant2$ 阶的满足如下条件的所有行列式的和：在每一

个行列式的每一行和每一列中有一个元素等于 1，而其余的为 0，问这种行列式共有多少个？

234．求 $n\geqslant 2$ 阶行列式的和：

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \cdots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \cdots & a_{2\alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \cdots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

其中求和是对彼此独立地由 1 变化到 $n$ 的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的全体而取的．

235．令行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的所有元素都是一位整数，用 $N_i$ 表示用第 $i$ 行的数字按照在该行原先的排列次序所得到的数(亦即 $a_{in}$ 是个位数字，$a_{i,n-1}$ 是十位数字等等)．证明：行列式的值能被数 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 的最大公约数所除尽．

236．按第三行展开，计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

237．按第二列展开，计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

计算行列式:

238. $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.　　239. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

240. $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

241. 令 $M_{ij}$ 是行列式 $D$ 的元素 $a_{ij}$ 的子式. 证明: 如果 $D$ 是对称行列式或者奇数阶的斜对称行列式, 则 $M_{ij}=M_{ji}$; 如果 $D$ 是偶数阶的斜对称行列式, 则 $M_{ij}=-M_{ji}$.

242. 令 $D$ 是 $n>1$ 阶的行列式. $D'$ 和 $D''$ 分别是在 $D$ 中用 $a_{ij}$ 的代数余子式 $A_{ij}$ 和用 $a_{ij}$ 的子式 $M_{ij}$ 代替每一个 $a_{ij}$ 所得的两个行列式. 证明: $D'=D''$. 行列式 $D'$ 叫做 $D$ 的转置伴随行列式. 关于用 $D$ 表示 $D'$, 参看习题 506.

243. 不展开而计算行列式:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

不展开行列式证明下列恒等式:

244*. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$.

245*. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

246*. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{i-1} & a_1^{i+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{i-1} & a_2^{i+1} & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{i-1} & a_n^{i+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$

$$=\Big(\sum_{k_1,k_2,\cdots k_{n-i}} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_{n-i}}\Big)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

其中求和取遍由 $n$ 个数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 取 $n-i$ 个的所有组合.

利用行列式的性质, 包括按行或列展开, 证明下列恒等式:

247*. $\begin{vmatrix} \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} & \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} & \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} & \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} & \cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{2}[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)].$$

248. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$

$$= \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta$$

$$+ \sin(\beta-\gamma)\cos\beta\cos\gamma$$

$$+ \sin(\gamma-\alpha)\cos\gamma\cos\alpha.$$

249. $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

250. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)}.$$

251. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)(x-z)(y-z)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)(a+z)(b+z)(c+z)}.$$

252.

$$\begin{vmatrix} a^2+(1-a^2)\cos\varphi & ab(1-\cos\varphi) & ac(1-\cos\varphi) \\ ba(1-\cos\varphi) & b^2+(1-b^2)\cos\varphi & bc(1-\cos\varphi) \\ ca(1-\cos\varphi) & cb(1-\cos\varphi) & c^2+(1-c^2)\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2\varphi,$$

当 $a^2+b^2+c^2=1$.

253*.

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$=1$.

254. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

255. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac+2d.$$

256*. $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-4[x^2+y^2+z^2+u^2-2(xy+xz+xu+yz+yu+zu)].$$

## § 4. 计算数值元素的行列式

计算下列行列式:

257. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$ 258. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

259. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 1 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.  260. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

261. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.  262. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

263. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.  264. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

265. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.  266. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

267. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.  268. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$.

269. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.  270. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

271. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.  272. $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$.

**273.**

$$\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}.$$

**274.**

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}.$$

**275.**

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

**276*.**

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}.$$

**277.**

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}.$$

278. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

## §5. $n$ 阶行列式的计算法

**引言** 把某一行(列)的元素除一个外全变为零并因此减少阶数来计算数值元素行列式的方法，在以字母为元素的行列式的情形是极其繁琐的. 这种方法在一般情形所导致的表达式就是直接应用行列式的定义计算行列式时所得到的那个表达式. 这种方法在具有字母元素或者数字元素的行列式是任意 $n$ 阶时更加不方便.

计算这种行列式的一般方法是不存在的（如果不计在行列式定义中所给出的表达式的话）. 处理特殊类型的行列式应用着各种不同的计算方法，这些方法所导致的行列式的表达式，比按定义所给出的表达式要简单些(即包含较少的运算). 这里我们将研究几个最常用的方法，并给出每种方法的习题以及需要学生自己选择最适当解法的习题. 为方便起见，与拉普拉斯定理和行列式乘法有关的习题另外安排两节处理.

**I. 化到三角形的方法.** 这一方法是把行列式变换成如下形式：就是使得位于对角线一侧的所有元素全都等于零. 次对角线的情形，可以用改变行（或列）的次序成相反次序的方法，化到主对角线的情形. 所得到的行列式等于主对角线元素的乘积.

**例 1** 计算下列 $n$ 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

从其余各行减去第一行:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}.$$

**例 2** 计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

从其余各行中减去第一行:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

从第一列中提出 $a_1-x$, 从第二列中提出 $a_2-x$, ………, 从第 $n$ 列中提出 $a_n-x$:

$D=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$

$$\times\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

置$\frac{a_1}{a_1-x}=1+\frac{x}{a_1-x}$并把所有各列加于第一列:

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$$

$$\times\begin{vmatrix} 1+\frac{x}{a_1-x}+\cdots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$$

$$\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

**2. 分离线性因子法.** 把行列式看成含于其中的一个或一些字母的多项式. 变换它,发现: 它可被一些线性因子所整除,这意味着(如果这些因子互素)它也可被这些因子的积所整除.

将行列式个别项与线性因子积的项比较, 求用这乘积除行列式的商,从而求得行列式的表达式.

**例 3** 计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

如果对第一列加上其余各列, 则发现: 行列式可用 $x+y+z$

除尽；如果对第一列加上第二列并减去第三和第四列，则分离出因子 $y+z-x$；如果对第一列加上第三列并减去第二和第四列，则分离出因子 $x-y+z$；最后，如果对第一列加上第四列并减去第二和第三列，则分离出因子 $x+y-z$. 认为 $x$, $y$, $z$ 是独立的未知量，则得结论：所有这四个因子两两互素，这意味着行列式可被它们的积

$$(x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z)$$

除尽.

这乘积包含项 $z^4$，带有系数 $-1$，而行列式本身包含同一项 $z^4$，但带有系数 $+1$. 所以，

$$\begin{aligned}D&=-(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)\\&=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2.\end{aligned}$$

**例 4** 用分离线性因子法计算 $n$ 阶的 Vandermonde 行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

把 $D_n$ 看成系数依赖于 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的一个未知量 $x_n$ 的多项式，我们看到，当 $x_n=x_1, x_n=x_2, \cdots, x_n=x_{n-1}$ 时它变为零，所以它可被 $x_n-x_1, x_n-x_2, \cdots, x_n-x_{n-1}$ 除尽.

所有这些因子互素(因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代数独立).

这意味着 $D_n$ 可被它们的积除尽，即

$$D_n=q(x_1, x_2, \cdots, x_n)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}).$$

按最后一行展开 $D_n$，我们看到它是关于 $x_n$ 的 $n-1$ 次多项式，并且 $x_n^{n-1}$ 的系数等于未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的 Vandermonde 行列式 $D_{n-1}$；因为上面等式右端括号的乘积包含 $x_n^{n-1}$，带有系数 $+1$，所以多项式 $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不包含 $x_n$. 比较等式两端 $x_n^{n-1}$ 的系数，

得到 $D_{n-1}=q(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$. 由此

$$D_n=D_{n-1}(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}).$$

用 $n-1$ 代替 $n$ 应用这一等式，有

$$D_{n-1}=D_{n-2}(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2}).$$

用 $D_{n-1}$ 的这一表达式代入上面 $D_n$ 的表达式中去. 重复这种讨论，我们最后分离出因子 $x_2-x_1$，并导致一阶的凡得蒙行列式 $D_1=1$.

这样，

$$\begin{aligned}D_n&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\\&\quad\cdots(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\\&=\prod_{i>j}(x_i-x_j).\end{aligned}$$

**3. 递推关系式法.** 这一方法是：变换已知行列式并按行或按列把它展开成较低阶的同类型的行列式的表示式. 所得到的等式称为递推关系式.

在递推关系式右端出现几个低阶的行列式，然后，就按行列式的一般形式计算几个低阶的行列式. 更高阶的行列式逐次由递推关系式算出. 如果要得到任何 $n$ 阶的行列式的表达式，则从递推关系式中算出一些低阶的行列式，力求发现所求表达式的一般形式，再借助递推关系式用对 $n$ 的归纳法去证明对任何 $n$ 这表达式正确.

一般的表达式也可用另外的方法得到. 为此，在表达 $n$ 阶行列式的递推关系式中，把在递推关系式中以 $n-1$ 换 $n$ 所得到的关于 $n-1$ 阶行列式的表达式代入；其次，把 $n-2$ 阶行列式的类似表达式代入；等等；直到所求 $n$ 阶行列式的一般表达式为止. 也可以将两种方法联合使用，先利用第二种方法找出所求表达式，再用对 $n$ 的归纳法证明这表达式正确. 递推关系式法是此处所研究的方

法中最有用的方法，它适用于较复杂的行列式.

在举出用递推关系式法计算行列式的例子之前，我们研究一个特殊情形，在这情形，递推关系式给问题的解以一个算法，它排除了在一般情形所固有的猜测因素. 令递推关系式的形式为

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, n>2 \tag{1}$$

其中 $p$, $q$ 是常量，即与 $n$ 无关的量①.

当 $q=0$ 时，$D_n$ 可以作为几何级数的项算出来：

$$D_n = p^{n-1}D_1,$$

这里 $D_1$ 是该类型的一阶行列式，即行列式 $D_n$ 位于左上角的元素.

令 $q\neq 0$, $\alpha$ 和 $\beta$ 是二次方程 $x^2-px-q=0$ 的根. 则 $p=\alpha+\beta$, $q=-\alpha\beta$, 而等式(1)可以写成：

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}) \tag{2}$$

或者

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}). \tag{3}$$

首先假定 $\alpha\neq\beta$.

按 $n-1$ 项的几何级数的公式由等式(2)和(3)求得：

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)$$

和

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1),$$

由此

$$D_n=\frac{\alpha^{n-1}(D_2-\beta D_1)-\beta^{n-1}(D_2-\alpha D_1)}{\alpha-\beta}$$

或者

$$D_n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n, \tag{4}$$

---

① 这方法是 A. Я. 奥库涅夫告知作者的. 这方法也可应用于递推关系式

$$D_n=p_1D_{n-1}+\cdots+p_kD_{n-k},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是常数，$k$ 是任何整数，但由于讨论很复杂，我们只考察 $k=2$ 的情形.

其中

$$C_1=\frac{D_2-\beta D_1}{\alpha(\alpha-\beta)},\ C_2=-\frac{D_2-\alpha D_1}{\beta(\alpha-\beta)}.$$

$D_n$ 的最后表达式容易记忆．它是对 $n>2$ 导出的，但对 $n=1$ 和 $n=2$ 可直接验证．$C_1$ 和 $C_2$ 的值可以不从表达式(4)而从初始条件 $D_1=C_1\alpha+C_2\beta, D_2=C_1\alpha^2+C_2\beta^2$ 求得．

令 $\alpha=\beta$．等式(2)和(3)都变成

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}),$$

由此

$$D_n-\alpha D_{n-1}=A\alpha^{n-2},\tag{5}$$

其中

$$A=D_2-\alpha D_1.$$

用 $n-1$ 替换 $n$，得到

$$D_{n-1}-\alpha D_{n-2}=A\alpha^{n-3},$$

由此

$$D_{n-1}=\alpha D_{n-2}+A\alpha^{n-3}.$$

把上式代入等式(5)，求得：

$$D_n=\alpha^2 D_{n-2}+2A\alpha^{n-2}.$$

重复同样的方法若干次，得到：

$$D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2},$$

或者

$$D_n=\alpha^n[(n-1)C_1+C_2],$$

其中

$$C_1=\frac{A}{\alpha^2},\qquad C_2=\frac{D_1}{\alpha}$$

(这里 $\alpha\neq 0$，因为 $q\neq 0$)．

**例 5**．用递推关系式法计算例 2 的行列式．

把右下角的元素表示成 $a_n=x+(a_n-x)$，我们可把行列式 $D_n$

分解成两个行列式之和:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & 0 \\ x & a_2 & \cdots & x & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \cdots & x & a_n-x \end{vmatrix}.$$

在第一个行列式中,将最后一列从其他各列中减去,而第二个行列式按最后一列展开:

$$D_n=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)+(a_n-x)D_{n-1}.$$

这就是递推关系式. 将 $D_{n-1}$ 的类似表达式代进上式,得

$$D_n=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)+$$

$$+x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_n-x)+D_{n-2}(a_{n-1}-x)(a_n-x).$$

重复同样的讨论 $n-1$ 次并注意 $D_1=a_1-x+(a_1-x)$,得到

$$D_n=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)+x(a_1-x)\cdots(a_{n-2}-x)$$

$$(a_n-x)+\cdots+x(a_2-x)\cdots(a_n-x)+(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$$

$$\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right),$$

这与例2结果一致.

**例6**. 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

按第一行展开,求得递推关系式

$$D_n=5D_{n-1}-6D_{n-2}.$$

方程 $x^2-5x+6=0$ 有根 $\alpha=2, \beta=3$.

按公式(4), $D_n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n=3^{n+1}-2^{n+1}$.

**4. 表为行列式之和的方法.** 某些行列式用关于行(或列)把它分成同阶行列式之和的方法容易计算之.

**例 7.** 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

将这行列式关于第一行分解为两个行列式, 将所得两个行列式之每一个关于第二行再分解成两个行列式, 等等, 一直到最后一行, 得到 $2^n$ 个行列式.

如果在每次分解时, 把数 $a_i$ 取作头一个加项, 把数 $b_j$ 取作第二个加项, 则所得到的各行列式中的各行或者形如 $a_i, a_i, \cdots, a_i$, 或者形如 $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 第一种类型的两行成比例, 而第二种类型的两行是相等的, 当 $n>2$ 时, 在每一个所得到的行列式中至少有两行是同一种类型的, 所以该行列式等于零. 于是当 $n>2$ 时, $D_n=0$.

其次,

$$D_1=a_1+b_1, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}=(a_1-a_2)(b_2-b_1).$$

**5. 变换行列式元素法.** 这个方法应用于那些情形, 就是: 当以同一个数改变行列式的所有元素时得到一个行列式, 而对后者容易算出其所有元素的代数余子式. 这方法基于下面的性质: 如果对行列式 $D$ 的所有元素都加上同一数 $x$, 则该行列式 $D$ 增加了行列式 $D$ 所有元素的代数余子式的和与数 $x$ 的积. 事实上, 令

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix}a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}.$$

把 $D'$ 关于第一行分解成两个行列式，再把所得的两个行列式关于第二行都分解成两个行列式等等。

在这些行列式中，包含元素全是 $x$ 的行多于一行的行列式等于零。

把只包含一行元素全是 $x$ 的行列式，按照这行展开，得到：

$$D'=D+x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij},$$

这就是要证的事。

这样，计算行列式 $D'$ 归结为计算行列式 $D$ 以及它的代数余子式之和。

**例 8**．计算例 2 的行列式 $D_n$。

从它所有的元素中减去数 $x$，得到行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1-x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2-x & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n-x\end{vmatrix}.$$

$D$ 的非主对角线元素的代数余子式等于零，而每一个主对角线元素的代数余子式等于主对角线其余元素的积．所以，

$$\begin{aligned}D_n=&(a_1-x)\cdots(a_n-x)\\&+x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\cdots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\cdots(a_n-x)\\=&x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right).\end{aligned}$$

用化到三角形形式的方法计算下列行列式（当从行列式的形式不能知道其阶时，总假定它为 $n$ 阶）：

279.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

280.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

281.

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

282.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \cdots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}.$$

283.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

284. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

285*. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

286. 一个 $n$ 阶行列式的元素由条件 $a_{ij}=\min(i,j)$ 给定，试计算此行列式.

287. 一个 $n$ 阶行列式的元素由条件 $a_{ij}=\max(i,j)$ 给定，试计算此行列式.

288*. 计算 $n$ 阶行列式，它的元素由条件 $a_{ij}=|i-j|$ 所给定.

用分离线性因子法计算下列各行列式：

289. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$.

290. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1-x \end{vmatrix}$

291. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}.$

292. $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$

293. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$

294*. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}.$

用递推关系式法计算下列行列式:

295*. $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}.$

296*. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$

297. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

298. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}$.

299. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$.

300. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$.

301. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}$.

302. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

303. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

304. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

用表示行列式为行列式之和的方法计算下列各行列式:

305*. $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$.

306*. $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

307*. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n & a_n \end{vmatrix}$.

308. $\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \cdots & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

计算下列行列式(行列式的阶等于多少不明显的话, 总假定它等于 $n$):

309. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$.

310. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

311. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & n-1 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

312. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$.

313. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

314. $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$.

315. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

316. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

317. $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

318. $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$.

319. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$

320. $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$

321. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$

322. $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$

323. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}.$

324. $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

325. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \cdots & x^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

326. $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$.

327. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$.

328. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^n \end{vmatrix}$.

329. $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

330. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \cdots & x_n^3+x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$.

331. $\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \cdots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \cdots & x+a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \cdots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}$.

332. $\begin{vmatrix} 1 & \sin\varphi_1 & \sin^2\varphi_1 & \cdots & \sin^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \sin\varphi_2 & \sin^2\varphi_2 & \cdots & \sin^{n-1}\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \sin\varphi_n & \sin^2\varphi_n & \cdots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$.

333. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \cdots & \cos^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_2 & \cdots & \cos^{n-1}\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos^2\varphi_n & \cdots & \cos^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$.

334. $\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$.

其中 $\varphi_k(x)=x^k+a_{k1}x^{k-1}+a_{k2}x^{k-2}+\cdots+a_{kk}$.

335. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(\cos\varphi_1) & f_1(\cos\varphi_2) & \cdots & f_1(\cos\varphi_n) \\ f_2(\cos\varphi_1) & f_2(\cos\varphi_2) & \cdots & f_2(\cos\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1}(\cos\varphi_1) & f_{n-1}(\cos\varphi_2) & \cdots & f_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix},$$

其中 $f_k(x)=a_{k0}x^k+a_{k1}x^{k-1}+a_{k2}x^{k-2}+\cdots+a_{kk}$.

336. $$\begin{vmatrix} 1 & C_{x_1}^1 & C_{x_1}^2 & \cdots & C_{x_1}^{n-1} \\ 1 & C_{x_2}^1 & C_{x_2}^2 & \cdots & C_{x_2}^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_{x_n}^1 & C_{x_n}^2 & \cdots & C_{x_n}^{n-1} \end{vmatrix},$$

其中$C_x^k=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$.

337. $$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

338. $$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \cdots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

339. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \cdots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

340. $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$.

341. $\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-2}\alpha_1\cos\alpha_1 & \cdots & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \sin^{n-1}\alpha_2 & \sin^{n-2}\alpha_2\cos\alpha_2 & \cdots & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin^{n-1}\alpha_n & \sin^{n-2}\alpha_n\cos\alpha_n & \cdots & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}$.

342.

$$\begin{vmatrix} f_n(x_1,y_1) & y_1f_{n-1}(x_1,y_1) & \cdots & y_1^{n-1}f_1(x_1,y_1) & y_1^n \\ f_n(x_2,y_2) & y_2f_{n-1}(x_2,y_2) & \cdots & y_2^{n-1}f_1(x_2,y_2) & y_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x_{n+1},y_{n+1}) & y_{n+1}f_{n-1}(x_{n+1},y_{n+1}) & \cdots & y_{n+1}^{n-1}f_1(x_{n+1},y_{n+1}) & y_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

其中$f_i(x,y)$是$x,y$的$i$次齐次多项式.

343*. $\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ a_2 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

344*. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$.

345. $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

**346.**

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

**347*.**

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}.$$

**348*.**

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

**349*.**

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos 2\varphi_2 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos 2\varphi_n & \cdots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix}.$$

**350*.**

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \cdots & \sin n\varphi \\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \cdots & \sin n\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \cdots & \sin n\varphi_n \end{vmatrix}.$$

**351*.**

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

352. $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix}$.

353*. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

354. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$.

355. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

356. $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$.

其中$f_i(x)$是次数不高于$n-2$的多项式.

357. $\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$.

358*. $\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}$.

359*. $\begin{vmatrix} a_1-b_1+x & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2+x & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n+x \end{vmatrix}$.

360. $\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}$.

361*. $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

(行列式的阶等于 $2n$).

362. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & b_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{2n-1} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}$.

363. $\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}$.

364*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \end{vmatrix}.$$

365*. 被称为 Fibonacci 序列的是这样的数列：它起始于数 1, 2, 而后面的每一个数等于其前面的两个数之和, 即 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ⋯(Fibonacci 是十三世纪意大利的数学家).

证明：Fibonacci 序列的第 $n$ 项等于 $n$ 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

计算下列行列式：

366. $$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

367. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

368. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

369*. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

370. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}$.

371*. 证明等式:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

利用这一结果和习题 369 的结果，推出用 $\cos\alpha$ 表示 $\cos n\alpha$ 的公式。

372. 证明等式

$$\frac{\sin nx}{\sin\alpha} = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix},$$

其中行列式为 $n-1$ 阶. 利用这一等式和习题369的结果，把 $\sin n\alpha$ 表为 $\cos\alpha$ 的多项式与 $\sin\alpha$ 的乘积的形式。

373*. 不算出行列式而证明等式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & b_3c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

计算下列行列式:

374. $$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

375. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

376*.

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+2x & \cdots & a+(n-2)x & a+(n-1)x \\ a+(n-1)x & a & a+x & \cdots & a+(n-3)x & a+(n-2)x \\ a+(n-2)x & a+(n-1)x & a & \cdots & a+(n-4)x & a+(n-3)x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+x & a+2x & a+3x & \cdots & a+(n-1)x & a \end{vmatrix}.$$

377. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \cdots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \cdots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

378. 不算出行列式而确定以下两个循环行列式间的联系：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

它们是由同一些数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 应用循环排列而得到的，但两者循

环方向相反.

计算下列行列式:

379.* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$,

其中$\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

380.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+2}{1} & \cdots & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \binom{m+3}{2} & \cdots & \binom{m+n+1}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \binom{m+n+1}{n} & \cdots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}.$$

381.* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$.

382*
$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{n+1}{n} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \binom{n+2}{2} & \cdots & \binom{n+2}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}.$$

383*
$$\begin{vmatrix} \binom{p+n}{n} & \binom{p+n+1}{n} & \cdots & \binom{p+2n}{n} \\ \binom{p+n+1}{n} & \binom{p+n+2}{n} & \cdots & \binom{p+2n+1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{p+2n}{n} & \binom{p+2n+1}{n} & \cdots & \binom{p+3n}{n} \end{vmatrix}.$$

384*
$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{n} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{p+n}{1} & \binom{p+n}{2} & \cdots & \binom{p+n}{n} \end{vmatrix}.$$

385*
$$\begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \cdots & \binom{m}{p+n} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \cdots & \binom{m+1}{p+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m+n}{p} & \binom{m+n}{p+1} & \cdots & \binom{m+n}{p+n} \end{vmatrix}.$$

386*. $$\begin{vmatrix} 1 & \binom{2}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{4} & \binom{n+1}{4} & \cdots & \binom{n+1}{n} \end{vmatrix}.$$

387*. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 6 & 10 & \cdots & \frac{n(n+1)}{2!} \\ 4 & 10 & 20 & \cdots & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & \frac{n(n+1)}{2!} & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} & \cdots & \frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!} \end{vmatrix}.$$

388*. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

389*.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & 0 & \cdots & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2 & 3! & 0 & \cdots & x^3 \\ 1 & 4 & 4\cdot 3 & 4\cdot 3\cdot 2 & 4! & \cdots & x^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & n(n-1)(n-2)(n-3) & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

390*.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_0 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & 0 & x_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

391*.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ y & 0 & x & \cdots & x \\ y & y & 0 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

392.

$$\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ y & a & x & \cdots & x \\ y & y & a & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

393.

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ y & a_2 & x & \cdots & x \\ y & y & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

394.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & y & a_2 & x & \cdots & x \\ 1 & y & y & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

395. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$

396. $\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+1 \end{vmatrix}.$

397. $\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \cdots & a_n \\ -n & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}.$

398. $\begin{vmatrix} \csc\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\csc\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\csc\alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\csc\alpha \end{vmatrix}.$

399*. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}.$

400. $\begin{vmatrix} a^{p}-x & a^{p+1}-x & \cdots & a^{p+n-1}-x \\ a^{p+n}-x & a^{p+n+1}-x & \cdots & a^{p+2n-1}-x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{p+n(n-1)}-x & a^{p+n(n-1)+1}-x & \cdots & a^{p+n^2-1}-x \end{vmatrix}.$

401. $\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \ldots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \ldots & a^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \ldots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}.$

402. $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$

403. $\begin{vmatrix} c_0 & b & b & b & \ldots & b \\ a & c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a & 0 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 0 & 0 & 0 & \ldots & c_n \end{vmatrix}.$

404*. $\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \cdots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \cdots & -(n-1)b \\ 1 & (n-1)a & a & -3b & \cdots & -(n-1)b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2a & a & a & \cdots & a \end{vmatrix}.$

405*. $\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x_2-a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}.$

406. $\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & (x_2-a_2)^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & (x_3-a_3)^2 & \cdots & a_3a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}.$

407.* $\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

408. $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

409.* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

410.* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

411.* $\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \cdots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \cdots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}$.

412. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$.

413. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+4 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+2^n \end{vmatrix}$.

414. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$.

415. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+a & x & \cdots & x \\ x & x & x+a^2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+a^n \end{vmatrix}$.

416.* $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}$.

417.* $\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1-a_1} & \frac{1}{x_1-a_2} & \cdots & \frac{1}{x_1-a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_n-a_1} & \frac{1}{x_n-a_2} & \cdots & \frac{1}{x_n-a_n} \end{vmatrix}$.

418.* $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}$.

419.* $\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$.

420.* 对 $n$ 阶连分行列式:

$$(a_1a_2\cdots a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

求出其展开式组成的规律,即求 $a_1, a_2, \cdots, a_n$的多项式的展开式的组成规律. 写出在展开形式下的 4 阶, 5 阶和 6 阶连分行列式(上述形式的行列式之所以称为“连分行列式”, 是因为它与连分数有联系,参看习题 539).

## § 6. 子式、代数余子式和 Laplace 定理

421. $n$ 阶行列式包含多少个 $k$ 阶子式?

422. 证明: 在确定代数余子式的符号时,可以不利用该子式的行和列的号码和,而利用该子式的余子式的号码和. 换言之,如果$M$是给定子式,$M'$是余子式,$A$是$M$的代数余子式,$A'$是$M'$的代数余子式,则从 $A=\varepsilon M'$,其中 $\varepsilon=\pm1$,可以推出 $A'=\varepsilon M$.

423. 证明: 按任何 $k$ 行(列)对 $n$ 阶行列式进行 Laplace 分解,与按其余 $n-k$ 行(列)的分解是相同的.

424.* 证明: 子式$M$的代数余子式 $A$ 和余子式 $M'$ 之间的符号规则可以陈述如下: 令 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$分别是子式$M$的行和列在 $n$ 阶行列式 $D$ 中按增加次序排列的号数,而$\alpha_{k+1}$,

$\alpha_{k+2}, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \cdots, \beta_n$ 分别是余子式 $M'$ 的行和列按增加次序的号数；则当置换 $\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n \\ \beta_1, & \beta_2, & \cdots, & \beta_n \end{pmatrix}$ 是偶置换时，$A=M'$；是奇置换时，$A=-M'$.

利用 Laplace 定理计算下列行列式：

425. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.　426. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.　427. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

428. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.　429. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

430. $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.　431. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

432. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.　433. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

434. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

435. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

436. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

437. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$.

438. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a' & b' & c' \\ a & a' & x_1 & y_3 & y_2 \\ b & b' & y_3 & x_2 & y_1 \\ c & c' & y_2 & y_1 & x_3 \end{vmatrix}$.

439. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

440. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

441. $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$.

442. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$.

443.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix}.$$

444. $$\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \cdots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \cdots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \cdots & a_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \cdots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

预先进行变换，利用 Laplace 定理计算下列行列式：

445*. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

446. $$\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

447. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$

448. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$

449. $\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$

450. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

451.① $\begin{vmatrix} 1+x & x & \cdots & x & x & \cdots & x & 1+x \\ x & 1+x & \cdots & x & x & \cdots & 1+x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & 1+x & 1+x & \cdots & x & x \\ x & x & \cdots & 1+2x & 1+x & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & 1+2x & \cdots & x & x & \cdots & 1+x & x \\ 1+2x & x & \cdots & x & x & \cdots & x & 1+x \end{vmatrix}.$

---

① 行列式的阶等于 $2n$.

452.① $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{nn} \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

453.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & x & a_1 & a_2-1 & \cdots & a_{n-1}-1 & a_n-1 \\ 1 & 1 & \cdots & x & 1 & a_1-1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}-1 & a_n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & 1 & \cdots & 1 & 1 & a_1-1 & a_2-1 & \cdots & a_{n-1}-1 & a_n \\ a_1-x & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 & x-a_1 \\ a_2 & a_2-x & \cdots & a_2 & a_2 & -a_2 & -a_2 & \cdots & x-a_2 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n & a_n-x & x-a_n & -a_n & \cdots & -a_n & -a_n \end{vmatrix}.$$

454. 在偶数 $n=2k$ 阶的行列式 $D$ 中，标出四个 $k$ 阶的子式 $M_1, M_2, M_3, M_4$，如下图所示：

$$\begin{array}{c} \qquad M_1 \qquad\qquad\qquad\qquad M_2 \\ \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|. \\ \qquad M_3 \qquad\qquad\qquad\qquad M_4 \end{array}$$

① 行列式的阶等于 $2n$.

在下列两种情形，用子式 $M_1, M_2, M_3, M_4$ 表示行列式 $D$：

(a) 如果 $M_2$ 或者 $M_3$ 的所有元素等于零；

(b) 如果 $M_1$ 或 $M_4$ 的所有元素等于零.

455. 在 $n=kl$ 阶的行列式 $D$ 中划出 $l$ 个沿次对角线排列的 $k$ 阶子式，即 $M_1$ 位于前 $k$ 行和最后 $k$ 列、$M_2$ 位于接下去的 $k$ 行和往前的 $k$ 列，等等，最后，$M_l$ 位于最后的 $k$ 行和头 $k$ 列.

如果 $D$ 中位于所述子式串一侧的所有元素等于零，试用 $M_1$，$M_2, \cdots, M_l$ 表示 $D$.

456. 在 $n$ 阶行列式 $D$ 中可选出 $k$ 行和 $l$ 列，$l \leqslant k$，并且被选出这 $l$ 列的不位于被选出 $k$ 行上的所有元素都等于零. 试证明：在行列式 $D$ 关于被选出 $k$ 行的 Laplace 展开式中，只须取那些包含被选出 $l$ 列的 $k$ 阶子式；改变行和列的角色所得到的断言也是正确的.

457. 利用 Laplace 定理，解习题 206.

458. 证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \cdots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \cdots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \cdots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \cdots & 0 & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \cdots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

459*. 计算下列 $k+l$ 阶的行列式：

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 3 & & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k\text{ 行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} l\text{ 行} \end{matrix}$$

460. 按前 $k$ 行写出 $n$ 阶连分行列式

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

的展开式(与习题 420 比较)．

由此当 $n=2k$ 时得到 Fibonacci 数（参看习题 365）的什么性质?

461. 不打开括号，证明等式

$$(ab'-a'b)(cd'-c'd)-(ac'-a'c)(bd'-b'd) + (ad'-a'd)(bc'-b'c)=0$$

对 $a, b, c, d, a', b', c', d'$ 的任何值都成立．

462*. 在包含 $n$ 行和 $2n$ 列的矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,2n} \end{array}\right)$$

中取任意 $n$ 阶子式 $M$，使它包含左半部矩阵的至少一半的列．

令 $\sigma$ 是子式 $M$ 的列的号数的和，$M'$ 是由矩阵的其余列所组成的 $n$ 阶子式. 证明：

$$\sum(-1)^{\sigma}MM'=0,$$

其中求和取遍全体所述类型的子式 $M$.

463*. 证明以下三个行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 & a_1x_2 & b_1x_2 & a_1x_3 & b_1x_3 \\ a_2x_1 & b_2x_1 & a_2x_2 & b_2x_2 & a_2x_3 & b_2x_3 \\ a_1y_1 & b_1y_1 & a_1y_2 & b_1y_2 & a_1y_3 & b_1y_3 \\ a_2y_1 & b_2y_1 & a_2y_2 & b_2y_2 & a_2y_3 & b_2y_3 \\ a_1z_1 & b_1z_1 & a_1z_2 & b_1z_2 & a_1z_3 & b_1z_3 \\ a_2z_1 & b_2z_1 & a_2z_2 & b_2z_2 & a_2z_3 & b_2z_3 \end{vmatrix},$$

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{和 } \Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

用下面的等式相联系着：

$$D=\delta^3\Delta^2$$

(这一性质的推广在习题 540).

464*. 假定

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4,$$

$$h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4,$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3+px^2+qx+r.$$

证明：

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f(\gamma) \\ g(\alpha) & g(\beta) & g(\gamma) \\ h(\alpha) & h(\beta) & h(\gamma) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ r & q & p & 1 & 0 \\ 0 & r & q & p & 1 \end{vmatrix}.$$

465. 称行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \\ y_{11} & \cdots & y_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{k1} & \cdots & y_{kn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

是由行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

借助 $k$ 行和 $k$ 列利用加边的方法所得到.

证明: 当 $k>n$ 时, $D=0$; 而当 $k\leqslant n$ 时, 则 $D$ 是关于行列式 $\Delta$ 的元素 $a_{ij}$ 的 $n-k$ 次的齐式(即齐次多项式)和关于加边元素 $x_{ij}$, $y_{ij}$ 的 $2k$ 次齐式, 它的系数是行列式 $\Delta$ 中 $k$ 阶子式的代数余子式. 也就是证明:

$$D=(-1)^k\Sigma A_{i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_k}X_{i_1i_2\cdots i_k}Y_{j_1j_2\cdots j_k},$$

其中 $A_{i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_k}$ 是行列式 $\Delta$ 中位于第 $i_1$, $i_2$, $\cdots$, $i_k$ 行和第 $j_1$, $j_2$, $\cdots$, $j_k$ 列的子式的代数余子式, 而 $X_{i_1i_2\cdots i_k}$ 和 $Y_{j_1j_2\cdots j_k}$ 是行列式 $D$ 的子式, 由位于下标所指行(和列)的加边元素所组成。这里, 求和取遍在条件 $i_1<i_2<\cdots<i_k$, $j_1<j_2<\cdots<j_k$ 下指标由 1 变到 $n$ 的所有组合.

466*. 证明 Laplace 定理的下一推广. 如果将 $n$ 阶行列式 $D$ 的行分为无公共行的 $p$ 组, 第一组行的号码是 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k$, 第二组行的号码是 $\alpha_{k+1}<\alpha_{k+2}<\cdots<\alpha_{k+l}$, 等等. 最后一组行的号码是 $\alpha_{n-s+1}<\alpha_{n-s+2}<\cdots<\alpha_n$; 然后, 在第一组行构成的矩阵中, 取列号码是 $\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k$ 的 $k$ 阶子式 $M_1$, 在第二个矩阵中, 取列号码不同于$M_1$ 列号码的 $\beta_{k+1}<\beta_{k+2}<\cdots\beta_{k+l}$ 的 $l$ 阶子式$M_2$, 等等, 最后, 在最后一个矩阵中, 取剩下的列, 号码是$\beta_{n-s+1}<\beta_{n-s+2}<\cdots<\beta_n$的 $s$ 阶子式$M_p$; 然后组成乘积 $\varepsilon M_1M_2\cdots M_p$, 其中如果置换

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

是偶的，则 $\varepsilon=+1$，置换是奇的，则 $\varepsilon=-1$. 试证明行列式 $D$ 等于所有可能的上述形式的乘积之和. 这一 Laplace 定理的推广可由习题 424推出.

## §7. 行列式的乘法

467. 对行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix},$$

用四种可能的方法进行相乘（即用第二个行列式的行或列乘第一个的行或列），并验证在四种情形，所得到的行列式的值都等于给定的两行列式的值的乘积.

468. 用平方行列式的方法计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}.$$

469. 用平方法计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & d & -c & f & -e & -h & g \\ -c & -d & a & b & g & h & -e & -f \\ -d & c & -b & a & h & -g & f & -e \\ -e & -f & -g & -h & a & b & c & d \\ -f & e & -h & g & -b & a & -d & c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & f & e & -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

用把行列式表为行列式的乘积的方法计算下列行列式:

470*.
$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

471.
$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$$

472.
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) & \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \cdots & \cos(\alpha_1-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_2) & 1 & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & \cdots & \cos(\alpha_2-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & 1 & \cdots & \cos(\alpha_2-\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(\alpha_1-\alpha_n) & \cos(\alpha_2-\alpha_n) & \cos(\alpha_3-\alpha_n) & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

473.
$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \cdots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \cdots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}.$$

474.
$$\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \dfrac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \dfrac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \dfrac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \dfrac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \cdots & \dfrac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}.$$

475.
$$\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}.$$

476*. $\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & (n+1)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \cdots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}$.

477. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$，其中 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$.

478*. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$，其中 $s_k=x_1^k+$ $+x_2^k+\cdots+x_n^k$.

479*. 证明：循环行列式的值为下列等式所决定

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n),$$

其中 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$ 而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 $n$ 次单位根的全部值.

480. 证明：在上题的同样记号下，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

481. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \cdots & \alpha^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

482. 利用习题 479 的结果计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

483. 利用习题 479 的结果计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}.$$

计算下列行列式:

484. $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & C_n^1 & \cdots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & 1 & 1 & \cdots & C_n^{n-3} & C_n^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

485. $$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \cdots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \cdots & (n-1)a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2a & 3a^2 & 4a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

486*. 证明:

$$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \cdots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \cdots & s-a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s-a_2 & s-a_3 & \cdots & s-a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix},$$

其中 $s=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

计算下列行列式:

487*.
$$\begin{vmatrix} \overbrace{-1 & -1 & -1 & \cdots & -1}^{(p\text{ 列})} & \overbrace{1 & 1 & \cdots & 1 & 1}^{(n-p\text{ 列})} \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

488*.
$$\begin{vmatrix} \overbrace{a & a & a & \cdots & a}^{(p\text{ 列})} & \overbrace{b & b & \cdots & b & b}^{(n-p\text{ 列})} \\ b & a & a & \cdots & a & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & a & a & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

489*.
$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \cdots & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \cos\frac{4\pi}{n} & \cdots & \cos\frac{\pi}{n} \end{vmatrix}.$$

490*
$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cdots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos(n-1)\theta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \cdots & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

491.

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \cdots & \sin[a+(n-1)h] \\ \sin[a+(n-1)h] & \sin a & \sin(a+h) & \cdots & \sin[a+(n-2)h] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \sin(a+3h) & \cdots & \sin a \end{vmatrix}.$$

492*. $$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & (n-1)^2 \\ (n-1)^2 & n^2 & 1^2 & \cdots & (n-2)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 1^2 \end{vmatrix}.$$

493*. 计算斜循环行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

494.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n z & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} z & a_n z & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 z & a_3 z & a_4 z & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$ 其中 $z$ 是任一数。

495*. 证明: 第一行元素为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}$ 的 $2n$ 阶循环行列式, 等于一个 $n$ 阶循环行列式和一个 $n$ 阶斜循环行列式的乘积, 前者第一行元素是 $a_1+a_{n+1}, a_2+a_{n+2}, \cdots, a_n+a_{2n}$, 后者第一行元素是 $a_1-a_{n+1}, a_2-a_{n+2}, \cdots, a_n-a_{2n}$。

496*. 将两个行列式相乘

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{vmatrix}$$

证明 Euler 恒等式:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)$$
$$=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+(x_1y_2-x_2y_1-x_3y_4+x_4y_3)^2$$
$$+(x_1y_3+x_2y_4-x_3y_1-x_4y_2)^2+(x_1y_4-x_2y_4+x_3y_2-x_4y_1)^2$$

由此可以推出整数的什么性质?

497*. 利用行列式的乘法证明恒等式:

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(a'^3+b'^3+c'^3-3a'b'c')$$
$$=A^3+B^3+C^3-3ABC,$$

其中 $A=aa'+bc'+cb', B=ac'+bb'+ca', C=ab'+ba'+cc'$.

由此可以推出整数的怎样性质;

498*. 在前题的记号下,证明下列恒等式

$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$\times(a'^2+b'^2+c'^2-a'b'-a'c'-b'c')$$
$$=A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC.$$

499*. 证明行列式乘法定理的下列推广. 给定两个矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{和 } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

每一个矩阵都是 $m$ 行 $n$ 列.

把一个矩阵的行同另一个矩阵的行相组合,令

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk},$$

组成一个 $m$ 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

其次，用 $A_{i_1,i_2,\cdots,i_m}$ 和 $B_{i_1,i_2,\cdots,i_m}$ 分别表示矩阵 $A$ 和 $B$ 如下的 $m$ 阶子式：由这两个矩阵号码是 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 的列组成，次序如同它们号码的排列 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 一样，则当 $m\leqslant n$ 时，

$$D=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n} A_{i_1,i_2,\cdots,i_m}B_{i_1,i_2,\cdots,i_m} \tag{1}$$

(Binet-Cauchy 公式)，即行列式 $D$ 等于矩阵 $A$ 的所有 $m$ 阶子式与矩阵 $B$ 的对应子式的乘积之和．而当 $m>n$ 时，

$$D=0. \tag{2}$$

500*．利用行列式的乘法定理，证明上题的断言(2)．

501*．不实施乘法，证明 Cauchy 恒等式：

$$(a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n)(b_1d_1+b_2d_2+\cdots+b_nd_n)$$
$$-(a_1d_1+a_2d_2+\cdots+a_nd_n)(b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_nc_n)$$
$$=\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_ib_k-a_kb_i)(c_id_k-c_kd_i)\quad (n>1).$$

502．不进行相乘，证明 Lagrange 恒等式：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2=\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_ib_k-a_kb_i)^2.$$

503*．证明：对任何实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，成立不等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2,$$

并且等号当且仅当给定的两组数中的一组与另一组只差一个数值因子(可以是零)时成立(Cauchy-Bunyakovsky 不等式)．

504*. 证明：对任何复数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 成立等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{a}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k \bar{b}_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k b_k\right)$$

$$= \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)(\bar{a}_j \bar{b}_k - \bar{a}_k \bar{b}_j).$$

505*. 证明：对任何两组复数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 成立下列不等式：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right) \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k\right|^2.$$

并且等号当且仅当一组数与另一组数仅差一个数值因子时成立.

506*. 称为 $n>1$ 阶行列式 $D$ 的转置伴随行列式的是这样的行列式 $D'$，它是将 $D$ 的每一个元素用该元素的代数余子式来代替（保持原来的位置）而得到的. 证明：

$$D' = D^{n-1}. \qquad (1)$$

507*. 令 $M$ 是行列式 $D$ 的 $m$ 阶子式、$A$ 是 $M$ 的代数余子式，$M'$ 是转置伴随行列式 $D'$ 的、与 $M$ 相对应的子式（即由行列式 $D$ 的含于 $M$ 中的元素的代数余子式所组成的子式）. 证明等式

$$M' = D^{m-1}A.$$

如果约定整个行列式 $D$ 的余子式等于 1，则这一等式是前题等式（当 $m=n$）的推广.

508*. 令 $C$ 是由行列式 $D$ 划去第 $i$ 和第 $j$ 行以及第 $k$ 和第 $l$ 列所得的 $(n-2)$ 阶子式，并且 $i<j$ 和 $k<l$；$A_{pq}$ 照例是元素 $a_{pq}$ 的代数余子式. 证明：

$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+k+l} DC.$$

509*. 证明：如果行列式 $D$ 等于零，则转置伴随行列式所有

各行成比例(列也一样).

510*. 令 $a_{ij}$ 是 $n$ 阶行列式 $D$ 的元素, 而 $A'_{ij}$ 是 $D$ 的转置伴随行列式 $D'$ 的对应元素 $A_{ij}$ 的代数余子式. 证明:

$$A'_{ij}=D^{n-2}a_{ij}.$$

511*. 令 $M$ 是 $n$ 阶行列式 $D$ 的 $m$ 阶子式, $M'$ 是转置伴随行列式 $D'$ 的与 $M$ 对应的子式, $A'$ 是子式 $M'$ 的代数余子式. 证明

$$A'=D^{n-m-1}M$$

这是前题等式的推广.

512*. 已知非零行列式 $D$ 的所有元素的子式, 求各元素.

513*. 令

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k \qquad (k=1, 2, 3, \cdots),$$

$$p=x_1x_2\cdots x_n.$$

证明

$$\begin{vmatrix} n+1 & s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}=p^2\begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

514. 证明: 如果

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix},$$

则乘积 $D(x)\cdot D(-x)$ 可以表为形式

$$\begin{vmatrix} A_{11}-x^2 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-x^2 & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-x^2 \end{vmatrix},$$

其中所有的 $A_{ij}$ 与 $x$ 无关，求用 $a_{ki}$ 表达 $A_{ij}$ 的式子.

515*. 藉助行列式乘法证明：交换两行(或两列) 的位置时，行列式变号.

516*. 藉助行列式乘法证明：如果将行列式一行(或列)乘以数 $c$ 加到另一行(或列)上去，则行列式不变.

517*. 证明：如果 $\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3=0$，则行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_3 & 1 & \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & 1 \end{vmatrix}$$

等于零.

518*. 令 $l_1, l_2, l_3$ 和 $m_1, m_2, m_3$ 是两条射线与直交坐标轴间的角的余弦，而 $\varphi$ 是两射线间的角，证明：

$$\sin^2\varphi=(l_1m_2-l_2m_1)^2+(l_2m_3-l_3m_2)^2+(l_3m_1-l_1m_3)^2.$$

519. 令 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ 是三射线 $L_1, L_2, L_3$ 与直交坐标轴间的夹角，又令这些射线彼此间的夹角是

$$\varphi_1=\angle(L_2, L_3), \varphi_2=\angle(L_3, L_1), \varphi_3=\angle(L_1, L_2).$$

证明：

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2$$

$$=1-\cos^2\varphi_1-\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_3+2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3$$

520*. 令 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 是平面上点 $M_1, M_2, M_3$ 的直角坐标，证明当旋转坐标轴和移动原点时，行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

不变，利用这点说明这行列式的几何意义.

521*. 令$(x_1, y_1)$和$(x_2, y_2)$ 是平面上两点$M_1$和$M_2$的直角坐标，阐明行列式$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$的几何意义，从而查明在旋转坐标轴和移动原点时它是否改变？

522*. 计算行列式的乘积

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & R \\ x_2 & y_2 & R \\ x_3 & y_3 & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & R \end{vmatrix},$$

从而得出用三角形的边 $a, b, c$ 和面积 $S$ 表示外接圆半径的公式.

523*. 令 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 分别是三条两两直交的射线 $OA$, $OB$, $OC$ 与直角坐标系的轴 $Ox$, $Oy$, $Oz$ 间夹角的余弦. 证明行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1;$$

并且取正号是在三面形 $OABC$ 与 $Oxyz$ 有相同定向的情形（这意味着当旋转图形 $OABC$ 时可以使 $OA$ 与 $Ox$、$OB$ 与 $Oy$、$OC$ 与 $Oz$ 重合），负号是在定向相反的情形（这意味着当将 $OA$ 与 $Ox$、$OB$ 与$Oy$ 重合时，射线 $OC$ 与 $Oz$ 处在相反的方向）.

524*. 令$(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$是空间三点$M_1$, $M_2$, $M_3$的坐标，证明：当旋转坐标系时(假定是直角坐标系)，行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

不变，并说明这行列式的几何意义.

525*. 求平行六面体体积$V$的如下表达式：用通过一个顶点

的棱的长 $a, b, c$ 和这些棱组成的角 $\alpha, \beta, \gamma$ 表示 $V$（长为 $b$ 和 $c$ 的棱组成角 $\alpha$；$c$ 和 $a$ 组成 $\beta$；$a$ 和 $b$ 组成 $\gamma$）。

526*. 令 $l_1, l_2, l_3$；$m_1, m_2, m_3$；$n_1, n_2, n_3$ 分别是射线 $OA$, $OB$, $OC$ 与直角坐标系正半轴 $Ox, Oy, Oz$ 的夹角的余弦.

证明：射线 $OA, OB$ 和 $OC$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

527*. 令 $(x_i, y_i, z_i)$ 是空间点 $M_i$ $(i=1,2,3,4)$ 的直角坐标. 证明行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

当坐标原点移动时不变，以此说明这行列式的几何意义。

528*. 将行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & R \\ x_2 & y_2 & z_2 & R \\ x_3 & y_3 & z_3 & R \\ x_4 & y_4 & z_4 & R \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & -z_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & -z_3 & R \\ -x_4 & -y_4 & -z_4 & R \end{vmatrix}$$

相乘，得出外接于任意四面形的球的半径用这四面形的体积和棱来表示的表达式. 特别地，从所得表达式中求出外接于棱长为 $a$ 的正四面形的球的半径.

## § 8. 杂　　题

529*. 证明：$n$ 阶行列式允许下列公理化的定义（与通常的定义等价）.

任何 $n$ 个数（或者任何域 $P$ 的元素）所成的行，称为向量，并用

一个黑体字母表示之．两个向量的加法以及纯量(数)与向量的乘法的定义如常，即如果

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n),$$

如果 $c$ 是纯量，则 $c\boldsymbol{a}=(ca_1,ca_2,\cdots,ca_n)$.

$n$ 个数值元素向量的函数 $f(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 称为对每一个变元是线性的(或者简称为是多线性的)，如果

$$f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,c'\boldsymbol{a}'_i+c''\boldsymbol{a}''_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$
$$=c'f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}'_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+c''f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}''_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\qquad(\alpha)$$

对任何包含在这里的向量，对任何数 $c'$ 和 $c''$ 以及对任何一个 $i=1,2,\cdots,n$ 成立．其次，称函数具有零化性质，如果

$$f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=0\ 当\ \boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_j,\qquad(\beta)$$
$$i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j.$$

令 $\boldsymbol{e}_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 是如下的向量：它的第 $i$ 个分量是 1，而其余的是零．函数 $f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 称为规范化的，如果

$$f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=1.\qquad(\gamma)$$

令给定 $n$ 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

以及 $|A|$ 为通常意义下的行列式，即

$$|A|=\sum(-1)^s a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

其中求和取遍数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，而 $s$ 是在每一排列中的反序数.

试证明：

(1) 行列式 $|A|$ 作为矩阵 $A$ 的行的函数，具有性质$(\alpha)$，$(\beta)$，

$(\gamma)$;

(2) $n$ 个向量的任何具有性质$(\alpha)$和 $(\beta)$ 的函数，满足等式 $f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=|A|f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$，其中 $A$ 是行为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的矩阵；

(3) 任何具有性质$(\alpha)$，$(\beta)$，$(\gamma)$的函数 $f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$，等于行为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的矩阵 $A$ 的行列式 $|A|$. 换句话说，矩阵 $A$ 的行列式 $|A|$ 是它的行的唯一的一个多线性的、具有零化性的、规范化的函数.

530*. 利用前题断言(2)，证明行列式乘法定理.

531. 证明：示性数异于 2 的域上的 $n$ 个向量的函数，当具有性质$(\alpha)$时，性质$(\beta)$等价于函数的变号性，即

$$f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$
$$=-f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \qquad (\beta')$$

对任何向量和任何 $i, j=1, 2, \cdots, n, i\neq j$ 成立. 试构造示性数为 2 的域 $P$ 上的 $n$ 个向量的函数的例子，使之具有性质 $(\alpha)$，$(\beta')$和$(\gamma)$，但不具有性质$(\beta)$.

532*. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \cdots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

其中 $$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

533*. 如果在行列式中选取 $k$ 行(或列)，并从这 $k$ 行的每一行中减去其余的所有被选取的各行，试问行列式如何变化？

534. 把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

表为按 $x$ 的幂排列的多项式.

535*. 证明：行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所有元素的代数余子式的和等于行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \cdots & a_{3n}-a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}.$$

536*. 证明：如果对行列式所有的元素加上同一个数，则这行列式所有元素的代数余子式之和不变.

537*. 证明：如果行列式的某一行(或列)的所有元素等于1，则这行列式所有元素的代数余子式之和等于该行列式自己.

538. 证明：如果偶数阶斜对称行列式的所有元素加上同一个数，则这行列式不变.

539*. 建立连分行列式(它的展开式参看习题 420)

$$(a_1a_2\cdots a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

和连分数之间的下列联系：

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}=\frac{(a_1a_2\cdots a_n)}{(a_2a_3\cdots a_n)}.$$

540*. 令给定两个行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\ (n\text{ 阶})$$

和

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{vmatrix}\ (p\text{ 阶})$$

组成 $np$ 阶的行列式：

$$D=\begin{vmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1p} & \cdots & a_{1n}b_{1p} \\
a_{21}b_{11} & \cdots & a_{2n}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{2n}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1p} & \cdots & a_{2n}b_{1p} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}b_{11} & \cdots & a_{nn}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \cdots & a_{nn}b_{12} & \cdots & a_{n1}b_{1p} & \cdots & a_{nn}b_{1p} \\
a_{11}b_{21} & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2p} & \cdots & a_{1n}b_{2p} \\
a_{21}b_{21} & \cdots & a_{2n}b_{21} & a_{21}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{22} & \cdots & a_{21}b_{2p} & \cdots & a_{2n}b_{2p} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}b_{21} & \cdots & a_{nn}b_{21} & a_{n1}b_{22} & \cdots & a_{nn}b_{22} & \cdots & a_{n1}b_{2p} & \cdots & a_{nn}b_{2p} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}b_{p1} & \cdots & a_{nn}b_{p1} & a_{n1}b_{p2} & \cdots & a_{nn}b_{p2} & \cdots & a_{n1}b_{pp} & \cdots & a_{nn}b_{pp}
\end{vmatrix}.$$

这样，行列式 $D$ 的矩阵由 $p^2$ 个小块组成，其每一个小块有 $n$ 行和 $n$ 列．并且处于第 $i$ 个分块行和第 $j$ 个分块列（对任何 $i, j=1, 2, \cdots, p$）处的小块是由行列式 $A$ 的矩阵把它所有的元素乘以 $b_{ij}$

而得到的．试证明：$D=A^pB^n$．行列式$D$称为行列式$A$和$B$的Kronecker乘积(参看习题963, 965)．

541．证明加边行列式展开的下列规则：如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

而$A_{ij}$是元素$a_{ij}$的代数余子式，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix}=Dz-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j.$$

542.* 令行列式$D$的元素是未知量$x_1, x_2, \cdots, x_s$的多项式，其中各多项式的系数是数值(或任何域$P$中的元素)，并且$D=0$．证明：行列式元素的代数余子式可以表为如下形式：

$$A_{ij}=A_iB_j,\quad i, j=1, 2, \cdots, n,$$

此处所有的$A_i$和$B_j$是$x_1, x_2, \cdots, x_s$的多项式．对行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

求出这些多项式，此处把$a, b, c$当作未知量．

543.* 利用前两题证明：偶数阶的斜对称行列式，是其位于主对角线上方的元素的某一多项式的平方．

544.* 证明：如果在斜对称行列式的一般表达式中，将$j>i$的每一元素$a_{ji}$换以$-a_{ij}$，则所有那些项——其下标的置换当分解成轮换时至少有一个奇数长的轮换的项——被对消掉．

545.* 令$D$是偶数$n$阶的斜对称行列式，元素是$a_{ij}=-a_{ji}$，

$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 乘积

$$\varepsilon a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \cdots a_{i_{n-1} i_n},$$

称为行列式$D$的 Pfaffian 乘积, 其中 $n/2$ 个分量元素的下标组成数 $1, 2, \cdots, n$ 的排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$; 如果排列是偶的, $\varepsilon = +1$; 如果排列是奇的, $\varepsilon = -1$. 如果 Pfaffian 乘积仅由$D$中主对角线上方的元素组成(即每个元素的第一个下标小于第二个下标), 则它称为归纳积. 行列式$D$的项, 如果其下标的置换仅有长为偶数的轮换, 则称为本性的. 一对归纳 Pfaffian 乘积 $N_1, N_2$ (在给定次序下)称为对应于行列式$D$的某给定的本性项, 如果它们是按这项用下列方法构成的: 令这给定项的下标的置换写为轮换如下:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{h-1} \alpha_h)(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{g-1} \beta_g) \cdots (\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{k-1} \mu_k), \tag{1}$$

此处 $\alpha_1 = 1$, 并且, 从第二个轮换开始的每一个轮换, 都从不含于它以前各轮换的数中的最小者开头. 我们现在构成 Pfaffian 乘积

$$N_1' = \varepsilon_1 a_{\alpha_1 \alpha_2} a_{\alpha_3 \alpha_4} \cdots a_{\alpha_{h-1} \alpha_h} a_{\beta_1 \beta_2} a_{\beta_3 \beta_4} \cdots a_{\beta_{g-1} \beta_g} \cdots a_{\mu_1 \mu_2} a_{\mu_3 \mu_4} \cdots a_{\mu_{k-1} \mu_k}$$

和

$$N_2' = \varepsilon_2 a_{\alpha_2 \alpha_3} a_{\alpha_4 \alpha_5} \cdots a_{\alpha_h \alpha_1} a_{\beta_2 \beta_3} a_{\beta_4 \beta_5} \cdots a_{\beta_g \beta_1} \cdots a_{\mu_2 \mu_3} a_{\mu_4 \mu_5} \cdots a_{\mu_k \mu_1},$$

然后将下标 $i > j$ 的每一个元素 $a_{ij}$, 用 $-a_{ji}$ 代换.

因此, 符号 $\varepsilon_1$ 或 $\varepsilon_2$ 改变了, 但置换的类型也改变了, 所以, 当每次代换时我们又得到 Pfaffian 乘积. 在 $N_1'$ 和 $N_2'$ 中完成所有的所指代换, 就得到对应于$D$的这给定本性项的归纳 Pfaffian 乘积对 $N_1, N_2$.

试证明:

(1) 任何一对归纳 Pfaffian 乘积(不同的或相同的) 对应行列式$D$一般展开式的一个仅一个本性项(在$D$的一般展开式中, 用形为 $a_{ij} = -a_{ji}$ 的代换由一项得到另一项的这样两项被认为是不

同的). 换句话说，在行列式$D$的所有本性项和所有归纳Pfaffian乘积对之间建立了一一对应.

(2) 每一个本性项等于其对应的那对归纳Pfaffian乘积的积.

(3) $D=p^2$，其中$p$是所有归纳Pfaffian乘积的和，此和称为行列式$D$的Pfaffian组或简称为Pfaffian.

546* 证明下列递推公式，它对计算上题定义的Pfaffian组是方便的. 如果$p_n$是偶数$n>2$阶的斜对称行列式$D_n=|a_{ij}|$的Pfaffian组，而$p_{in}$是行列式$D_{in}$的Pfaffian组，这里$D_{in}$是由$D_n$划去第$n$行和第$i$行以及对应列而得到的，其中$i=1, 2, \cdots, n-1$，则

$$p_n=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}p_{in}a_{in},\quad p_2=a_{12}.$$

证明：可将$p_{n-2}$的元素中所有大于或等于$i$的下标加1来得到$p_{in}$.

547. 利用前题公式，计算Pfaffian组$p_2$, $p_4$, $p_6$.

548. 设$D_n$是偶数$n$阶的斜对称行列式. 利用习题546的公式求$D_n$的Pfaffian组$p_n$的加项数，即$D_n$不同的归纳Pfaffian乘积的数目(仅仅因子次序不同的乘积不认为不同).

549* 令$D$是奇数$n$阶的斜对称行列式，元素是$a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$. $M_{ij}$是元素$a_{ij}$的子式，$p_{i,n+1}$是子式$M_{ii}$的Pfaffian组. 证明：

$M_{ij}=p_{i,n+1}p_{j,n+1},\quad i, j=1, 2, \cdots, n.$

其次证明：当把$D$的位于主对角线上方的元素看成是未知量$x_1, \cdots, x_s$时，可以取$A_i=(-1)^{i-1}p_{i,n+1}$, $B_j=(-1)^{j-1}p_{j,n+1}$作为习题542的多项式$A_i, B_j$.

验证：对行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$而言，用这种方法得到与习题542同样的结果（如果考虑到习题542中，所有多项式的$A_i$和$B_j$除了符号外是确定的）。

550* 证明：一般形式的行列式——把行列式的元素看作未知量，把行列式看成其元素的多项式——不能分解成如下的两个因式：每一个是上述未知量的非零次多项式．换句话说，行列式在任何域上是其元素的不可约多项式．

551．令$D=|a_{ij}|$是$n>1$阶的行列式，$k$是数$1, 2, \cdots, n$中的任一个，$\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$；用$s_1, s_2, \cdots, s_{\binom{n}{k}}$表示从$n$个数$1, 2, \cdots, n$中取$k$个的一切可能的组合，编号任意，但在下面顺序不变（为确定起见，在每一个组合中的数可以认为是递增排列的，虽然这点在下面不是本质的）．令$\mu_{ij}$表示行列式$D$的$k$阶子式——这一子式所在的行的号码是组合$s_i$中的数，所在列的号码是组合$s_j$中的数，$i, j=1, 2, \cdots, \binom{n}{k}$；令$\alpha_{ij}$是$D$中子式$\mu_{ij}$的代数余子式．下列形式的$\binom{n}{k}$阶行列式

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1\binom{n}{k}} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2\binom{n}{k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{\binom{n}{k}1} & \mu_{\binom{n}{k}2} & \cdots & \mu_{\binom{n}{k}\binom{n}{k}} \end{vmatrix},$$

称为行列式$D$的$k$阶子式的行列式．我们再引进一个$\binom{n}{k}$阶的行列式$\overline{\Delta}_k$——在$\Delta_k$中用$\mu_{ij}$在$D$中的代数余子式$\alpha_{ij}$代替每一个子式

$\mu_{ij}$ 而得到 $\bar{\Delta}_k$.

证明:

(1) 当改变组合的编号时, 行列式 $\Delta_k$ 和 $\bar{\Delta}_k$ 的值不变, 即将序列 $s_1, s_2, \cdots, s_{\binom{n}{k}}$ 中的组合进行重新排列时, $\Delta_k$ 和 $\bar{\Delta}_k$ 的值不变;

(2) $\Delta_k = \bar{\Delta}_{n-k}$, 这是习题 242 中断言的推广;

(3) $\Delta_k \bar{\Delta}_k = D^{\binom{n}{k}}$; (4) $\Delta_k = D^{\binom{n-1}{k-1}}$; (5) $\bar{\Delta}_k = D^{\binom{n-1}{k}}$.

552* 计算行列式 $P_n = |p_{ij}|$, 其中如果 $i$ 除尽 $j$, 则 $p_{ij} = 1$, 如果 $i$ 除不尽 $j$, 则 $p_{ij} = 0$. 求行列式 $Q_n = |q_{ij}|$ 的值, 其中 $q_{ij}$ 等于 $i$ 和 $j$ 的公约数的个数.

553* 序列 $1, 2, \cdots, n$ 中与 $n$ 互素的数的个数用 $\varphi(n)$ 表示, 它称为 Euler 函数. 利用上题和 Gauss 定理[$n = \sum \varphi(d)$, 其中对 $n$ 的一切约数 $d$ (包括 1 和 $n$ 在内)求和]证明: $n$ 阶行列式 $D_{ij} = |d_{ij}|$ 等于 $\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$, 其中 $d_{ij}$ 是数 $i$ 和 $j$ 的最大公约数.

# 第二章　线性方程组

## §9. 按 Cramer 规则求解的方程组

按 Cramer 规则解下列方程组:

554. $$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-x_3+x_4&=4,\\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4&=6,\\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4&=12,\\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4&=6. \end{aligned}$$

555. $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=2,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4&=-3,\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4&=-3. \end{aligned}$$

556. $$\begin{aligned} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4&=20,\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4&=11,\\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4&=40,\\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4&=37. \end{aligned}$$

557. $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3&=0,\\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4-6&=0,\\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8&=0,\\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8&=0. \end{aligned}$$

558. $$\begin{aligned} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4-2&=0,\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4-6&=0,\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4-3&=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4&=0. \end{aligned}$$

559. $6x+5y-2z+4t+4=0,$

$9x-y+4z-t-13=0,$

$3x+4y+2z-2t-1=0,$

$3x-9y+2t-11=0.$

560. $2x-y-6z+3t+1=0,$

$7x-4y+2z-15t+32=0,$

$x-2y-4z+9t-5=0,$

$x-y+2z-6t+8=0.$

561. $2x+y+4z+8t=-1,$

$x+3y-6z+2t=3,$

$3x-2y+2z-2t=8,$

$2x-y+2z=4.$

562. $2x-y+3z=9,$

$3x-5y+z=-4,$

$4x-7y+z=5.$

563. $2x-5y+3z+t=5,$

$3x-7y+3z-t=-1,$

$5x-9y+6z+2t=7,$

$4x-6y+3z+t=8.$

564* 有同样多个未知量的两个线性方程组(但不一定有同样多个方程),如果第一组的任何解满足第二组,且第二组的任何解满足第一组,则称它们是等价的(有同样多未知量的两个方程组,如果每一个都没有解,也认为是等价的).

证明:线性方程组的下列任一变换,变给定方程组为等价的方程组:

(a) 对调两个方程;

(b) 用任一不为零的数乘一个方程的两端;

(c) 将一个方程乘以任一数后由另一个方程中逐项减去之.

改变未知量的编号是否把给定方程组变为等价的方程组？当解方程组时，是否容许改变未知量的编号？

565. 证明：任何线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\cdots,s \tag{1}$$

利用前题形式为(a)，(b)，(c)的变换和改变未知量的编号，可以把它化到如下形式

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_j = d_i, \quad i=1,2,\cdots,s \tag{2}$$

后者满足下列三组条件之一组且仅满足一组：

(a) $c_{ii}\neq 0$, $i=1,2,\cdots,n$; $c_{ij}=0$，当 $i>j$ [特别地，第 $n$ 个以后的所有方程（当 $s>n$ 时）中的未知量的系数都是零]，$d_i=0$，当 $i=n+1,\cdots,s$（在这种情形，我们说：方程组被化到了三角形形式）；

(b) 存在整数 $r$，$0\leqslant r\leqslant n-1$，使得 $c_{ii}\neq 0$，$i=1,2,\cdots,r$; $c_{ij}=0$，当 $i>j$; $c_{ij}=0$，对 $i>r$ 和等于 $1,2,\cdots,n$ 的任何 $j$; $d_i=0$，对 $i=r+1,r+2,\cdots,s$.

(c) 存在整数 $r$，$0\leqslant r\leqslant n$，使有：$c_{ii}\neq 0$，当 $i=1,2,\cdots,r$; $c_{ij}=0$，当 $i>j$; $c_{ij}=0$，对 $i>r$ 和任何 $j=1,2,\cdots,n$. 存在整数 $k$，$r+1\leqslant k\leqslant s$，使得 $d_k\neq 0$.

证明：如果在组(2)中恢复未知量原来的编号，则得到与原方程组(1)等价的方程组.

然后证明：在情形(a)，组(2)（从而，组(1)）有唯一解；在情形(b)，组(2)有无穷多解，并且对未知量 $y_{r+1},\cdots,y_n$ 的任何值，存在其余未知量 $y_1,\cdots,y_r$ 的唯一一组值；在情形(c)，组(2)没有解. 这一定理给出了解线性方程组的消元法的根据.

566. 试证明：如果前题的线性方程组(1)有整系数，则对于把(1)化为(2)的过程中的所有变换，可以避开分数，所以组(2)也将具有整系数。

用消元法解下列方程组：

567. $$\begin{aligned} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4&=3,\\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4&=-3,\\ x_1+2x_2-4x_4&=-3,\\ x_1-x_2-4x_3+9x_4&=22. \end{aligned}$$

568. $$\begin{aligned} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4-7&=0,\\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-3&=0,\\ 3x_1-x_2+2x_3+1&=0,\\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4+7&=0. \end{aligned}$$

569. $$\begin{aligned} 2x_1-2x_2+x_4+3&=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4+6&=0,\\ 3x_1+4x_2-x_3-2x_4&=0,\\ x_1+3x_2+x_3-x_4-2&=0. \end{aligned}$$

570. $$\begin{aligned} x_1+x_2-6x_3-4x_4&=6,\\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4&=2,\\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4&=6,\\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4&=-7. \end{aligned}$$

571. $$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+3x_3+2x_4-3&=0,\\ 6x_1+9x_2-2x_3-x_4+4&=0,\\ 10x_1+3x_2-3x_3-2x_4-3&=0,\\ 8x_1+6x_2-x_3+3x_4+7&=0. \end{aligned}$$

572. $$\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3+9x_4&=79,\\ 3x_1+13x_2+18x_3+30x_4&=263,\\ 2x_1+4x_2+11x_3+16x_4&=146, \end{aligned}$$

$$x_1 - 9x_2 + 9x_3 - 9x_4 = 92.$$

573. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 35, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 &= 70, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 &= 126, \\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 &= 210. \end{aligned}$$

574. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 &= 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 &= 17, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 &= 57, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 &= 7. \end{aligned}$$

575.* $$\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 18x_4 + 20x_5 &= 14, \\ 10x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 24x_4 + 30x_5 &= 18, \\ 12x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 27x_4 + 35x_5 &= 32, \\ 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 15x_4 + 20x_5 &= 16, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 15x_4 + 15x_5 &= 11. \end{aligned}$$

576. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 9 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 + 146 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 + 10 &= 0, \\ x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 + 26 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 - 37 &= 0. \end{aligned}$$

577. $$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 14x_4 &= 21, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 13x_4 + 3x_5 &= 12, \\ 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - x_5 &= 29, \\ 15x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 9x_4 + 7x_5 &= 130, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= -13. \end{aligned}$$

578. $$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5,$$

$$x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3,$$
$$x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1,$$
$$5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12.$$

579. $$2x_1+3x_2-x_3+x_4=1,$$
$$8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3,$$
$$4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3,$$
$$2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3.$$

580. $$4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8,$$
$$3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7,$$
$$2x_1-x_2-5x_4=6,$$
$$5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1.$$

581. $$2x_1-x_2+x_3-x_4=3,$$
$$4x_1-2x_2-2x_3+3x_4=2,$$
$$2x_1-x_2+5x_3-6x_4=1,$$
$$2x_1-x_2-3x_3+4x_4=5.$$

582. 证明：$n$ 次多项式完全为它在未知量的 $n+1$ 个值所取的值所决定．精确些说，就是：对任何彼此不同的数 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和任何数 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，存在且仅存在一个次数 $\leqslant n$ 的多项式 $f(x)$，使得

$$f(x_i)=y_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n.$$

583. 利用前题证明：下列两个定义——关于一个未知量的数值系数的多项式（或以任何无限域中元素为系数的多项式）相等的两个定义——是等价的：

（1）两个多项式称为相等的，如果它们每对同次幂的项的系数相等（代数中采取的定义）；

（2）两个多项式称为相等的，如果它们作为函数是相等的，即对未知量的每个值它们的取值是相等的（分析学中采取的定义）．

(用归纳法容易对任何多个未知量的多项式证明类似的断言).

584. 证明：对于有限的系数域，前题的两个定义不等价(试构造一个例子).

585. 求二次多项式$f(x)$，如果已知

$$f(1)=-1,\ f(-1)=9,\ f(2)=-3.$$

586. 求三次多项式$f(x)$，使得

$$f(-1)=0,\ f(1)=4,\ f(2)=3,\ f(3)=16.$$

587. 习题582的断言有怎样的几何意义？

588. 求通过点(0, 1)，(1, −1)，(2, 5)，(3, 37)的三次抛物线，并且渐近方向平行于纵坐标轴.

589. 求一条四次抛物线，使它通过点(5, 0)，(−13, 2)，(−10, 3)，(−2, 1)，(14, −1)并且渐近方向平行于横坐标轴.

应用最适宜的方法解下列线性方程组：

590.
$$\begin{aligned}
-x+y+z+t&=a,\\
x-y+z+t&=b,\\
x+y-z+t&=c,\\
x+y+z-t&=d.
\end{aligned}$$

591*.
$$\begin{aligned}
a(x+t)+b(y+z)&=c,\\
a'(y+t)+b'(z+x)&=c',\\
a''(z+t)+b''(x+y)&=c'',\\
x+y+z+t&=d,
\end{aligned}$$

其中 $a\neq b,\ a'\neq b',\ a''\neq b''$.

592*.
$$\begin{aligned}
ax+by+cz+dt&=p,\\
-bx+ay+dz-ct&=q,\\
-cx-dy+az+bt&=r,\\
-dx+cy-bz+at&=s.
\end{aligned}$$

593.* $$\begin{aligned} &x_n+a_1x_{n-1}+a_1^2x_{n-2}+\cdots+a_1^{n-1}x_1+a_1^n=0,\\ &x_n+a_2x_{n-1}+a_2^2x_{n-2}+\cdots+a_2^{n-1}x_1+a_2^n=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &x_n+a_nx_{n-1}+a_n^2x_{n-2}+\cdots+a_n^{n-1}x_1+a_n^n=0, \end{aligned}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是不相同的数.

594. $$\begin{aligned} &x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\\ &a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,\\ &a_1^2x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_n^2x_n=b^2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_1^{n-1}x_1+a_2^{n-1}x_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=b^{n-1}, \end{aligned}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是不相同的数.

595. $$\begin{aligned} &x_1+a_1x_2+\cdots+a_1^{n-1}x_n=b_1,\\ &x_1+a_2x_2+\cdots+a_2^{n-1}x_n=b_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &x_1+a_nx_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=b_n, \end{aligned}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是不相同的数.

596. $$\begin{aligned} &x_1+x_2+\cdots+x_n=b_1,\\ &a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_1^{n-1}x_1+a_2^{n-1}x_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=b_n, \end{aligned}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是不相同的数.

597. $$\begin{aligned} &x_1+x_2+\cdots+x_n-1=0,\\ &2x_1+2^2x_2+\cdots+2^nx_n-1=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &nx_1+n^2x_2+\cdots+n^nx_n-1=0. \end{aligned}$$

598. $$\begin{aligned} &ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=c_1,\\ &bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=c_2, \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=c_n,$$

其中 $$(a-b)[a+(n-1)b]\neq 0.$$

599.* $$(3+2a_1)x_1+(3+2a_2)x_2+\cdots+(3+2a_n)x_n=3+2b,$$

$$(1+3a_1+2a_1^2)x_1+(1+3a_2+2a_2^2)x_2+\cdots+(1+3a_n+2a_n^2)x_n=1+3b+2b^2,$$

$$a_1(1+3a_1+2a_1^2)x_1+a_2(1+3a_2+2a_2^2)x_2+\cdots+a_n(1+3a_n+2a_n^2)x_n=b(1+3b+2b^2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1^{n-3}(1+3a_1+2a_1^2)x_1+a_2^{n-3}(1+3a_2+2a_2^2)x_2+\cdots+a_n^{n-3}(1+3a_n+2a_n^2)x_n=b^{n-3}(1+3b+2b^2),$$

$$a_1^{n-2}(1+3a_1)x_1+a_2^{n-2}(1+3a_2)x_2+\cdots+a_n^{n-2}(1+3a_n)x_n=b^{n-2}(1+3b).$$

600.* 把函数$\dfrac{x}{\ln(1+x)}$展为幂级数时，得到

$$\frac{x}{\ln(1+x)}=1+h_1x+h_2x^2+h_3x^3+\cdots,$$

证明

$$h_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

601. 如所周知$\dfrac{1}{\cos x}=1+\dfrac{e_1}{2!}x^2+\dfrac{e_2}{4!}x^4+\dfrac{e_3}{6!}x^6+\cdots$，其中 $e_1$, $e_2$, $e_3$, $\cdots$是所谓的 Euler 数，试证明：

$$e_n=(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

602* 在展开式 $\frac{x}{e^x-1}=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$ 中 $b_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}$，其中 $B_n$ 是所谓的 Bernoulli 数. 证明:

$$B_n=(-1)^{n-1}(2n)!$$

$$\times\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

其次，对 $n>1$，证明

$$b_{2n-1}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}=0.$$

603.* 证明：前题引进的 Bernoulli 数 $B_n$ 可以用下列 $n$ 阶行列式表示：

$$B_n=\frac{1}{2}(2n)!\begin{vmatrix}\frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-5)!} & \cdots & \frac{1}{3!}\end{vmatrix}$$

或者

$$B_n=2^n(2n)!\times\begin{vmatrix}\frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \cdots & 0\\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \cdots & \frac{1}{4!}\end{vmatrix}.$$

604.* 用 $s_n(k)$ 表示由 1 到 $k-1$ 的自然数的 $n$ 次方之和，即 $s_n(k)=1^n+2^n+\cdots+(k-1)^n$. 建立等式

$$k^n=1+C_n^{n-1}s_{n-1}(k)+C_n^{n-2}s_{n-2}(k)+\cdots+C_n^1s_1(k)+s_0(k)$$

并证明

$$
s_{n-1}(k)=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} k^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \cdots & C_n^1 & 1 \\ k^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \cdots & C_{n-1}^1 & 1 \\ k^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \cdots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k^2 & 0 & 0 & \cdots & C_2^1 & 1 \\ k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.
$$

605.* 把展开式

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1+l_1x^2+l_2x^4+\cdots+l_nx^{2n}+\cdots$$

的第 $n$ 个系数 $l_n$ 表示成行列式的形式.

606. 把展开式

$$x\operatorname{ctg} x=1-f_1x^2-f_2x^4-\cdots-f_nx^{2n}-\cdots$$

的第 $n$ 个系数 $f_n$ 表示成行列式的形式.

607.* 把展开式

$$e^{-x}=1-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots$$

的第 $n$ 个系数 $a_n$ 表示成行列式的形式，并由此求出行列式的值.

## § 10. 矩阵的秩. 向量和线性型的线性相关性

用加边子式的方法求下列矩阵的秩:

608. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

609. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

610. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

611. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

612. 求 $\lambda$ 的值，使下面的矩阵有最小的秩：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

对所求出的 $\lambda$ 值，矩阵的秩等于多少？对另外的 $\lambda$ 值，秩等于多少？

613. 对各个不同的 $\lambda$ 值，矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩等于多少？

614. 令 $A$ 是秩为 $r$ 的矩阵，$M_k$ 是位于 $A$ 左上角的 $k$ 阶子式。证明：用交换行和交换列的方法可以达到下列条件的成立：

$$M_1 \neq 0, \quad M_2 \neq 0, \quad M_r \neq 0,$$

而所有大于 $r$ 阶的子式（如果它们存在）等于零。

615. 下列变换（运算）称为矩阵的初等变换（运算）：

(1) 用不为零的数乘一行（或列）；

(2) 把一行（列）乘上任一数后加到另一行（列）上去；

(3) 交换任两行（列）。

证明：初等变换不改变矩阵的秩。

616. 证明：只实行上题所指(1)，(2)型的行（列）的变换，可以得出矩阵行（列）的交换。

617. 证明：用习题 615 中所指出的初等变换，可以把秩为 $r$ 的任何矩阵化到以下形式：元素 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{rr}=1$ 而其余的元素等于零。

618. 证明：仅用行的初等变换或仅用列的初等变换，可以把

方阵化到三角形形式，即主对角线一侧的所有元素都等于零，至于主对角线之上侧或下侧为零可随意.

借助初等变换计算下列矩阵的秩：

619. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 13 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$.

620. $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

621. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

622. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & 18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

623. 证明：如果矩阵包含 $m$ 行并且秩为 $r$，则它的任何 $s$ 行组成一个秩不小于 $r+s-m$ 的矩阵.

624. 证明：矩阵添加一行(或一列)，则秩或不变，或增加 1.

625. 证明：划去矩阵的一行(或列)秩不变当且仅当所划去的行(或列)可用其余的行(或列)线性表示.

626. 行数相同且列数相同的两个矩阵的和，指的是以下矩阵：它的每一个元素等于所给两矩阵对应元素的和，即 $(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$. 证明：两个矩阵的和的秩不大于它们的秩的和.

627. 证明：任一秩为 $r$ 的矩阵可以表为 $r$ 个秩为1的矩阵

的和，但不能表为少于 $r$ 个这种矩阵的和.

628. 证明：如果矩阵 $A$ 和 $B$ 有一样数目的行，并且把矩阵 $B$ 的每一列添加到 $A$ 上时，$A$ 的秩不变，则当把 $B$ 所有的列都添加到 $A$ 上时，$A$ 的秩也不变.

629.* 证明：如果矩阵 $A$ 的秩等于 $r$，则矩阵位于任何 $r$ 个线性无关行和任何 $r$ 个线性无关列交叉处的子式 $d$ 不等于零.

630.* 令 $A$ 是 $n>1$ 阶方阵，$\hat{A}$ 是 $A$ 的伴随矩阵. 试查明：矩阵 $\hat{A}$ 的秩 $\hat{r}$ 怎样随着矩阵 $A$ 的秩 $r$ 的变化而变化.

631.* 证明：对称矩阵的秩的计算，可以归结为只计算主子式，即所位于的行和列的号码对应相等的子式，也就是证明：

(1) 如果在 $n$ 阶对称矩阵 $A$ 中有一个 $r$ 阶的不为零的主子式 $M_r$，对于它，其所有 $(r+1)$ 阶和 $(r+2)$ 阶加边主子式等于零，则矩阵 $A$ 的秩等于 $r$ (如果所有主子式等于零，则可以认为零阶主子式 $M_0$ 等于 1，定理仍正确；当 $r=n-1$ 时，$(r+2)$ 阶子式不存在，但定理的断言正确，因为 $A$ 的秩等于 $n-1$)；

(2) 对称矩阵的秩等于这个矩阵非零主子式的最高阶数.

632.* 令 $A$ 是秩为 $r$ 的对称矩阵，$M_k$ 是位于矩阵 $A$ 左上角的 $k$ 阶子式(当 $k=0$ 时，认为 $M_0=1$). 证明：适当交换矩阵 $A$ 的某些行和对应的列，可以达到以下结果：在子式的系列 $M_0=1, M_1, M_2, \cdots, M_r$ 中，任何两个相邻的不全等于零，且 $M_r\neq 0$，高于 $r$ 阶的所有子式(如果它们存在)都等于零.

633.* 证明：斜对称矩阵的秩取决于它的主子式. 也就是：

(1) 如果存在一个 $r$ 阶的不为零的主子式，且对于它，其所有 $r+2$ 阶的加边主子式等于零，则矩阵的秩等于 $r$；

(2) 斜对称矩阵的秩等于这个矩阵不为零的主子式的最高阶数.

634.* 令 $A$ 是秩为 $r$ 的斜对称矩阵，$M_k$ 是位于矩阵 $A$ 左上角

的 $k$ 阶子式($M_0=1$). 证明: 适当交换矩阵 $A$ 的某些行和对应的列, 可以达到以下结果: 子式 $M_0, M_2, M_4, \cdots, M_r$ 不为零, 而子式 $M_1, M_3, \cdots, M_{r-1}$ 和所有高于 $r$ 阶的子式(如果它们存在)都等于零.

635. 证明: 斜对称矩阵的秩是偶数.

636. 求向量

$$\boldsymbol{a}_1=(4,1,3,-2),\qquad \boldsymbol{a}_2=(1,2,-3,2),$$
$$\boldsymbol{a}_3=(16,9,1,-3).$$

的线性组合 $\qquad 3\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3.$

637. 从以下方程中, 求向量 $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3+4\boldsymbol{x}=0,$$

其中

$$\boldsymbol{a}_1=(5,-8,-1,2),\qquad \boldsymbol{a}_2=(2,-1,4,-3),$$
$$\boldsymbol{a}_3=(-3,2,-5,4).$$

638. 从以下方程中, 求出向量 $\boldsymbol{x}$:

$$3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{x})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{x})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{x}),$$

其中

$$\boldsymbol{a}_1=(2,5,1,3),\qquad \boldsymbol{a}_2=(10,1,5,10),$$
$$\boldsymbol{a}_3=(4,1,-1,1).$$

查明下列向量组是线性相关还是线性无关:

639. $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3),$
$\boldsymbol{a}_2=(3,6,7).$

640. $\boldsymbol{a}_1=(4,-2,6),$
$\boldsymbol{a}_2=(6,-3,9).$

641. $\boldsymbol{a}_1=(2,-3,1),$
$\boldsymbol{a}_2=(3,-1,5),$
$\boldsymbol{a}_3=(1,-4,3).$

642. $\boldsymbol{a}_1=(5,4,3),$
$\boldsymbol{a}_2=(3,3,2),$
$\boldsymbol{a}_3=(8,1,3).$

643. $\boldsymbol{a}_1=(4,-5,2,6),$
$\boldsymbol{a}_2=(2,-2,1,3),$

644. $\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,2,5),$
$\boldsymbol{a}_2=(0,1,0,3,4),$

$\boldsymbol{a}_3=(6, -3, 3, 9)$, $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{a}_3=(0, \ 0, 1, \ 4, \ 7)$,

$\boldsymbol{a}_4=(4, -1, 5, 6)$. $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{a}_4=(2, -3, 4, 11, 12)$.

645. 设给定同样维数的一组向量，从每一个向量的坐标中，挑出某些确定的位置的坐标(对所有向量都是一样的位置)，保持原次序，则得到第二组向量，它称为第一组的**缩短组**，第一组称为第二组的**延伸组**．证明：线性相关向量组的任何缩短组是线性相关的，而线性无关向量组的任何延伸组是线性无关的．

646. 证明：包含两个相等向量的向量组是线性相关的．

647. 证明：一个向量组，若它有两个向量仅差一数量因子，则这向量组是线性相关的．

648. 证明：包含零向量的向量组是线性相关的．

649. 证明：如果向量组的一部分是线性相关的，则整个组也线性相关．

650. 证明：线性无关向量组的任何部分组，也是线性无关的．

651.* 令给定向量组

$$\boldsymbol{a}_i=(\alpha_{i,1}, \ \alpha_{i,2}, \ \cdots, \ \alpha_{i,n})$$
$$(i=1, 2, \cdots, s, \ \ s\leqslant n).$$

证明：如果

$$|\alpha_{jj}|>\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s}|\alpha_{ij}|,$$

则给定的向量组是线性无关的．

652 证明：如果三向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性相关，且向量 $\boldsymbol{a}_3$ 不能用向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 线性表示，则向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 仅差一数值因子．

653. 证明：如果向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 线性无关，而向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{b}$ 可用向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 线性表示．

654. 利用前题，证明：给定向量组的每一个向量，可用这组的任何线性无关最大子组线性表示.

655. 证明：由非零向量组成的有序组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$，当且仅当这些向量中的任何一个都不能用它前面的向量线性表示时，是线性无关的.

656*. 如果在有序线性无关向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 的前面再添写一个向量 $\boldsymbol{b}$，则在所得到的组中，能用其前面向量线性表示的向量不多于一个.

657*. 证明：如果向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关且能用向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 线性表示，则 $r \leqslant s$.

658. 给定的向量组的子组，如果具有下列性质，则称为该给定组的基底：

(1) 这子组线性无关；

(2) 整个组的任一向量可用这子组的向量线性表示.

证明：

($a$) 给定向量组的所有基底包含同样多个向量；

($b$) 任一基底的向量个数是该给定组线性无关向量的最大个数，这个数称为给定组的秩；

($c$) 如果给定的向量组有秩 $r$，则任何 $r$ 个线性无关向量构成该向量组的一个基底.

659*. 给定向量组的任何线性无关子组可以补充而做成该组的一个基底.

660. 两个向量组称为等价的，如果第一组的每一个向量可用第二组的向量线性表示，且反之亦然. 证明：两个等价的线性无关组包含同样多个向量.

661. 证明：如果向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 可用向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ 线性表示，则第一组的秩不大于第二组的秩.

662. 给定向量

$$\boldsymbol{a}_1=(0,1,0,2,0),\qquad \boldsymbol{a}_2=(7,4,1,8,3),$$

$$\boldsymbol{a}_3=(0,3,0,4,0),\qquad \boldsymbol{a}_4=(1,9,5,7,1),$$

$$\boldsymbol{a}_5=(0,1,0,5,0).$$

是否可以选择出数 $c_{ij}(i, j=1, 2, 3, 4, 5)$ 使向量

$$\boldsymbol{b}_1=c_{11}\boldsymbol{a}_1+c_{12}\boldsymbol{a}_2+c_{13}\boldsymbol{a}_3+c_{14}\boldsymbol{a}_4+c_{15}\boldsymbol{a}_5,$$

$$\boldsymbol{b}_2=c_{21}\boldsymbol{a}_1+c_{22}\boldsymbol{a}_2+c_{23}\boldsymbol{a}_3+c_{24}\boldsymbol{a}_4+c_{25}\boldsymbol{a}_5,$$

$$\boldsymbol{b}_3=c_{31}\boldsymbol{a}_1+c_{32}\boldsymbol{a}_2+c_{33}\boldsymbol{a}_3+c_{34}\boldsymbol{a}_4+c_{35}\boldsymbol{a}_5,$$

$$\boldsymbol{b}_4=c_{41}\boldsymbol{a}_1+c_{42}\boldsymbol{a}_2+c_{43}\boldsymbol{a}_3+c_{44}\boldsymbol{a}_4+c_{45}\boldsymbol{a}_5,$$

$$\boldsymbol{b}_5=c_{51}\boldsymbol{a}_1+c_{52}\boldsymbol{a}_2+c_{53}\boldsymbol{a}_3+c_{54}\boldsymbol{a}_4+c_{55}\boldsymbol{a}_5.$$

是线性无关的?

663. 证明: 当且仅当把向量 $\boldsymbol{b}$ 加于向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 后,向量组秩不变时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 可用向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 线性表示.

664.* 证明:

(1) 两个等价的向量组有同样的秩;

(2) 断言(1)的逆命题不真.

然而成立下列断言:

(3) 如果两个向量组有相同的秩且其中一组可用另一组线性表示, 则这两个向量组等价.

求出使向量 $\boldsymbol{b}$ 可用向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示的所有 $\lambda$ 值:

665. $\boldsymbol{a}_1=(2, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_2=(3, 7, 8)$, $\boldsymbol{a}_3=(1, -6, 1)$, $\boldsymbol{b}=(7, -2, \lambda)$.

666. $\boldsymbol{a}_1=(4, 4, 3)$, $\boldsymbol{a}_2=(7, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_3=(4, 1, 6)$, $\boldsymbol{b}=(5, 9, \lambda)$.

667. $\boldsymbol{a}_1=(3, 4, 2)$, $\boldsymbol{a}_2=(6, 8, 7)$, $\boldsymbol{b}=(9, 12, \lambda)$.

668. $\boldsymbol{a}_1=(3, 2, 5)$, $\boldsymbol{a}_2=(2, 4, 7)$, $\boldsymbol{a}_3=(5, 6, \lambda)$,

$$\boldsymbol{b}=(1, 3, 5).$$

669. $\boldsymbol{a}_1=(3, 2, 6)$,

$\boldsymbol{a}_2=(7, 3, 9)$,

$\boldsymbol{a}_3=(5, 1, 3)$,

$\boldsymbol{b}=(\lambda, 2, 5)$.

670. 从给定的向量在空间的位置的观点，解释习题665—669的答案.

671. 利用习题657证明：多于 $n$ 个的 $n$ 维向量总是线性相关的.

672. 求向量组

$\boldsymbol{a}_1=(4, -1, 3, -2)$, $\boldsymbol{a}_2=(8, -2, 6, -4)$,

$\boldsymbol{a}_3=(3, -1, 4, -2)$, $\boldsymbol{a}_4=(6, -2, 8, -4)$

所有的最大线性无关子组.

求下列向量组的所有基底：

673. $\boldsymbol{a}_1=(1, 2, 0, 0)$,

$\boldsymbol{a}_2=(1, 2, 3, 4)$,

$\boldsymbol{a}_3=(3, 6, 0, 0)$.

674. $\boldsymbol{a}_1=(1, 2, 3, 4)$,

$\boldsymbol{a}_2=(2, 3, 4, 5)$,

$\boldsymbol{a}_3=(3, 4, 5, 6)$,

$\boldsymbol{a}_4=(4, 5, 6, 7)$.

675. $\boldsymbol{a}_1=(2, 1, -3, 1)$,

$\boldsymbol{a}_2=(4, 2, -6, 2)$,

$\boldsymbol{a}_3=(6, 3, -9, 3)$,

$\boldsymbol{a}_4=(1, 1, \quad 1, 1)$.

676. $\boldsymbol{a}_1=(1, 2, 3)$,

$\boldsymbol{a}_2=(2, 3, 4)$,

$\boldsymbol{a}_3=(3, 2, 3)$,

$\boldsymbol{a}_4=(4, 3, 4)$,

$\boldsymbol{a}_5=(1, 1, 1)$.

677. 在怎样的情形下，一个向量组具有唯一的基底？

678. 秩为 $k$ 的 $k+1$ 个向量的组，包含成比例的非零向量，问它有多少个基底？

求出下列向量组的某一个基底，并将不包含在该基底中的所

有向量用基底向量表示:

679. $a_1=(5, 2, -3, 1)$, $a_2=(4, 1, -2, 3)$, $a_3=(1, 1, -1, -2)$, $a_4=(3, 4, -1, 2)$.

680. $a_1=(2, -1, 3, 5)$, $a_2=(4, -3, 1, 3)$, $a_3=(3, -2, 3, 4)$, $a_4=(4, -1, 15, 17)$, $a_5=(7, -6, -7, 0)$.

681. $a_1=(1, 2, 3, -4)$,
$a_2=(2, 3, -4, 1)$,
$a_3=(2, -5, 8, -3)$,
$a_4=(5, 26, -9, -12)$,
$a_5=(3, -4, 1, 2)$.

682* 令给定相同维数的向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 称为这向量组的线性关系基本组的, 是指形式为

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}x_j=0 \quad (i=1, 2, \cdots, s)$$

的关系组且具有以下两个性质:

(a) 这个关系组是线性无关的, 其意思是: 向量组

$$a_i=(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \cdots, \alpha_{i,n}) \quad (i=1, 2, \cdots, s)$$

是线性无关的;

(b) 向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任何线性相关性是给定组的关系的推论, 即如果

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j=0,$$

则向量 $a=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是向量 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 的线性组合. 试证明:

(1) 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 是给定向量组的基底且

$$\boldsymbol{x}_i=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{i,j}\boldsymbol{x}_j,\quad i=r+1, r+2, \cdots, n,$$

则关系组

$$\boldsymbol{x}_i-\sum_{j=1}^{r}\lambda_{i,j}\boldsymbol{x}_j=0\quad(i=r+1, r+2, \cdots, n)$$

是给定向量组线性关系基本组之一;

(2) 所有线性关系基本组包含同样数目个关系;

(3) 如果某一线性关系基本组包含 $s$ 个关系，则同一向量组的 $s$ 个线性无关的线性关系之任何组也是线性关系的基本组;

(4) 如果关系组

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}\boldsymbol{x}_j=0\quad(i=1, 2, \cdots, s)$$

是线性关系基本组, 则关系组

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}\boldsymbol{x}_j=0\quad(i=1, 2, \cdots, s)$$

也是线性关系基本组当且仅当：令

$$\boldsymbol{a}_i=(\alpha_{i,1},\ \alpha_{i,2},\ \cdots,\ \alpha_{i,n}),\quad i=1, 2, \cdots, s,$$

$$\boldsymbol{b}_i=(\beta_{i,1},\ \beta_{i,2},\ \cdots,\ \beta_{i,n}),\quad i=1, 2, \cdots, s,$$

则有

$$\boldsymbol{b}_i=\sum_{j=1}^{s}\gamma_{i,j}\boldsymbol{a}_j\quad(i=1, 2, \cdots, s),$$

其中系数 $\gamma_{i,j}$ 组成 $s$ 阶非零行列式.

利用矩阵的乘法，最后 $s$ 个向量等式可以写为一个矩阵等式的形式:

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A},$$

其中 $A=(\alpha_{i,j})_{s,n}$，$B=(\beta_{i,j})_{s,n}$，$C=(\gamma_{i,j})_{s}$，$C$ 是 $s$ 阶非奇异矩阵.

类似于习题 682 对向量组的情形，对线性型组定义线性关系基本组之后，对下列线性型组求出线性关系基本组：

683. $f_1=5x_1-3x_2+2x_3+4x_4,$
$f_2=2x_1-x_2+3x_3+5x_4,$
$f_3=4x_1-3x_2-5x_3-7x_4,$
$f_4=x_1+7x_3+11x_4.$

684. $f_1=8x_1+7x_2+4x_3+5x_4,$
$f_2=3x_1+2x_2+x_3+4x_4,$
$f_3=2x_1+3x_2+2x_3-3x_4,$
$f_4=x_1-x_2-x_3+7x_4,$
$f_5=5x_2+4x_3-17x_4.$

685. $f_1=5x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5,$
$f_2=3x_1+x_2-2x_3+3x_4+5x_5,$
$f_3=6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5,$
$f_4=7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5.$

686. $f_1=2x_1-3x_2+4x_3-5x_4,$
$f_2=x_1-2x_2+7x_3-8x_4,$
$f_3=3x_1-4x_2+x_3-2x_4,$
$f_4=4x_1-5x_2+6x_3-7x_4,$
$f_5=6x_1-7x_2-x_4.$

687. $f_1=3x_1+2x_2-2x_3-x_4+4x_5,$
$f_2=6x_1+4x_2-4x_3-2x_4+8x_5,$
$f_3=7x_1+5x_2-3x_3-2x_4+x_5,$
$f_4=4x_1+4x_2-4x_3-3x_4-5x_5,$
$f_5=8x_1+7x_2-5x_3-4x_4+2x_5.$

688*. 令给定线性型组(1):

$$f_j=\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}x_k \qquad (j=1,2,\cdots,s), \tag{1}$$

以及线性依赖于第一组中的型的第二个线性型组

$$\varphi_i=\sum_{j=1}^{s}c_{ij}f_j \qquad (i=1,2,\cdots,t). \tag{2}$$

证明：型组(2)的秩不大于型组(1)的秩．如果 $s=t$ 且行列式 $|c_{ij}|_s$ 异于零，则两个线性型组的秩相等．

## §11. 线性方程组

研究下列方程组的相容性并求其通解和一个特解:

689. $2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6,$
$3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4,$
$9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2.$

690. $2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1,$
$4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2,$
$2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1.$

691. $3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3,$
$6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7,$
$9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13.$

692. $3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2,$
$7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5,$
$5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3.$

693. $2x_1+5x_2-8x_3=8,$
$4x_1+3x_2-9x_3=9,$
$2x_1+3x_2-5x_3=7,$
$x_1+8x_2-7x_3=12.$

694. $3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2,$

$6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3,$

$9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4.$

695. $2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5,$

$6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7,$

$4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18.$

696. $9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4,$

$6x_1-2x_2+3x_3+x_4=5,$

$3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8.$

697. $3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2,$

$2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3,$

$9x_1+x_2+4x_3-5x_4=1,$

$2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5,$

$7x_1+x_2+6x_3-x_4=7.$

698. $x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1,$

$2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2,$

$3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1,$

$2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2.$

699. $2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2,$

$6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3,$

$6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9,$

$4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1.$

700. $6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1,$

$3x_1+2x_2-4x_3+x_4+2x_5=3,$

$3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7,$

$9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2.$

701. $x_1+2x_2+3x_3-2x_4-x_5=4,$

$$3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5,$$
$$x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11,$$
$$2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6.$$

702. $$6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=5,$$
$$4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=4,$$
$$4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0,$$
$$2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5=1.$$

703. $$8x_1+6x_2+5x_3+2x_4=21,$$
$$3x_1+3x_2+2x_3+x_4=10,$$
$$4x_1+2x_2+3x_3+x_4=8,$$
$$3x_1+5x_2+x_3+x_4=15,$$
$$7x_1+4x_2+5x_3+2x_4=18.$$

704. $$2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4,$$
$$4x_1+3x_2+x_3+x_4=5,$$
$$5x_1+11x_2+3x_3+2x_4=2,$$
$$2x_1+5x_2+x_3+x_4=1,$$
$$x_1-7x_2-x_3+2x_4=7.$$

705. 证明:

($a$) 任一 $n$ 个未知量 $s$ 个线性方程的方程组，若其未知量系数的矩阵有秩 $r$，则用改变方程和未知量的编号的方法可以把该方程组化到以下形式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,2,\cdots,s), \tag{1}$$

它具有性质

$$m_0=1,\ m_1\neq 0,\ m_2\neq 0,\cdots,m_r\neq 0, \tag{2}$$

共中 $m_k$ 是位于组(1)未知量系数矩阵左上角的 $k$ 阶子式;

($b$) 用将上面方程乘以适当数并从下面的方程减去的一系列

减法，可以把具有性质(2)的方程组化到等价组

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = d_i \qquad (i=1, 2, \cdots, s), \tag{3}$$

后者具有性质：

$$\left.\begin{array}{ll} c_{ii} \neq 0, & \text{当 } i=1, 2, \cdots, r, \\ c_{ij}=0, & \text{当 } j<i \leqslant r, \text{以及} \\ & \text{当 } i>r \text{ 而 } j=1, 2, \cdots, n. \end{array}\right\} \tag{4}$$

如果当 $i=r+1, r+2, \cdots, s$ 时，$d_i=0$，则组(3)和(1)是相容的，而且当 $r=n$ 时有唯一解；当 $r<n$ 时有无穷多解.

在后一情形，$x_{r+1}, \cdots, x_n$ 是自由未知量. 从第 $r$ 个方程可用自由未知量表示出 $x_r$. 将 $x_r$ 的这个表达式代进第 $(r-1)$ 个方程，我们求出 $x_{r-1}$ 用自由未知量表示的表达式，等等.

最后，从第一个方程求出 $x_1$ 用自由未知量表示的表达式.

所得到的用自由未知量 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的表达式是组(3)和(1)的通解. 这意味着：给自由未知量以任何值，从所求得的表达式我们得到组(3)和组(1)的一个解，并且，这两个组的任一解可以用此种方法适当选取自由未知量的值而得到.

如果，对一个或多个 $i>r$，使 $d_i \neq 0$，则组(3)和(1)是不相容的.

所述研究和解线性方程组的方法称为消元法(与习题 565 比较).

使用习题 705 指出的消元法，研究下列方程组的相容性并求通解(如果原方程组有整系数，则在消元过程中可以避免分数)：

706.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+x_4&=3, \\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4&=2, \\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4&=7, \\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4&=12, \end{aligned}$$

$5x_1+7x_2+9x_3+2x_4=20.$

**707.** $12x_1+14x_2-15x_3+23x_4+27x_5=5,$

$16x_1+18x_2-22x_3+29x_4+37x_5=8,$

$18x_1+20x_2-21x_3+32x_4+41x_5=9,$

$10x_1+12x_2-16x_3+20x_4+23x_5=4$

**708.** $10x_1+23x_2+17x_3+44x_4=25,$

$15x_1+35x_2+26x_3+69x_4=40,$

$25x_1+57x_2+42x_3+108x_4=65,$

$30x_1+69x_2+51x_3+133x_4=95.$

**709.** $45x_1-28x_2+34x_3-52x_4=9,$

$36x_1-23x_2+29x_3-43x_4=3,$

$35x_1-21x_2+28x_3-45x_4=16,$

$47x_1-32x_2+36x_3-48x_4=-17,$

$27x_1-19x_2+22x_3-35x_4=6.$

**710.** $\quad\quad 12x_2-16x_3+25x_4=29,$

$27x_1-24x_2+32x_3+47x_4=55,$

$50x_1+51x_2-68x_3+95x_4=115,$

$31x_1+21x_2-28x_3+46x_4=50.$

**711.** $24x_1+14x_2+30x_3+40x_4+41x_5=28,$

$36x_1+21x_2+45x_3+61x_4+62x_5=43,$

$48x_1+28x_2+60x_3+82x_4+83x_5=58,$

$60x_1+35x_2+75x_3+99x_4+102x_5=69.$

研究下列方程组并求依赖于参数 $\lambda$ 的通解:

**712.** $5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3,$

$4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1,$

$8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9,$

$7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda.$

713. $3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3,$

$2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5,$

$x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11,$

$4x_1+x_2+4x_3+\lambda x_4=2.$

714. $2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2,$

$4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4,$

$4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4,$

$2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7.$

715. $2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5,$

$4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7,$

$6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9,$

$\lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11.$

716. $2x_1+3x_2+x_3+2x_4=3,$

$4x_1+6x_2+3x_3+4x_4=5,$

$6x_1+9x_2+5x_3+6x_4=7,$

$8x_1+12x_2+7x_3+\lambda x_4=9.$

717. $\lambda x_1+x_2+x_3=1,$

$x_1+\lambda x_2+x_3=1,$

$x_1+x_2+\lambda x_3=1.$

718. $\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1,$

$x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1,$

$x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1,$

$x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1.$

719. $(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1,$

$x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda,$

$x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2.$

720. $(\lambda+1)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+3\lambda,$

$$x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda^3+3\lambda^2,$$
$$x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^4+3\lambda^3.$$

研究下列方程组并求依赖于包含在系数中的参数值的通解:

**721.** 
$$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ ax+by+cz&=d,\\ a^2x+b^2y+c^2z&=d^2. \end{aligned}$$

**722.** 
$$\begin{aligned} ax+y+z&=1,\\ x+by+z&=1,\\ x+y+cz&=1. \end{aligned}$$

在怎样的情形,某些未知量的零值是可能的?

**723.*** 
$$\begin{aligned} ax+y+z&=a,\\ x+by+z&=b,\\ x+y+cz&=c. \end{aligned}$$

求下列方程组的通解和基础解系:

**724.** 
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4&=0. \end{aligned}$$

**725.** 
$$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4&=0,\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4&=0. \end{aligned}$$

**726.** 
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5&=0,\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5&=0,\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5&=0,\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5&=0. \end{aligned}$$

**727.** 
$$\begin{aligned} 3x_1+5x_2+2x_3&=0,\\ 4x_1+7x_2+5x_3&=0, \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0,$$
$$2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0.$$

728. $$6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0,$$
$$9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0,$$
$$6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0,$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0.$$

729. $$x_1 - x_3 = 0,$$
$$x_2 - x_4 = 0,$$
$$-x_1 + x_3 - x_5 = 0,$$
$$-x_2 + x_4 - x_6 = 0,$$
$$-x_3 + x_5 = 0,$$
$$-x_4 + x_6 = 0.$$

730. $$x_1 - x_3 + x_5 = 0,$$
$$x_2 - x_4 + x_6 = 0,$$
$$x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0,$$
$$x_2 - x_3 + x_6 = 0,$$
$$x_1 - x_4 + x_5 = 0.$$

731. $$5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0,$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0,$$
$$7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0,$$
$$5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0.$$

732. $$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0,$$
$$5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0,$$
$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0,$$
$$7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0.$$

733. 证明：对于有理系数(特别说来，整系数)的任一齐次线性方程组，可以构造出整数的基础解系(在系数矩阵的秩小于未知

量个数时).

734. 证明：对于秩为 $r<n$ 的方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,s), \tag{1}$$

任何 $n-r$ 个线性无关的解

$$\begin{gathered}\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n}, \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n-r,1}, \alpha_{n-r,2}, \cdots, \alpha_{n-r,n}\end{gathered}$$

组成基础解系，而通解可以表为形式

$$x_j = \sum_{k=1}^{n-r} c_k\alpha_{kj} \qquad (j=1,2,\cdots,n). \tag{2}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 为任意参数．换言之，证明：对参数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 的任何值，公式(2)给出组(1)的解，并且组(1)的任一解可以从公式(2)适当选择参数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 的值而得到.

对下列方程组求出前题中形式(2)的通解，其中每一个未知量要用系数是整数的关于参数的齐次线性表达式表出：

735. $$\begin{aligned}2x_1+x_2-4x_3&=0,\\ 3x_1+5x_2-7x_3&=0,\\ 4x_1-5x_2-6x_3&=0.\end{aligned}$$

736. $$\begin{aligned}2x_1-x_2+5x_3+7x_4&=0,\\ 4x_1-2x_2+7x_3+5x_4&=0,\\ 2x_1-x_2+x_3-5x_4&=0.\end{aligned}$$

737. $$\begin{aligned}3x_1+2x_2+5x_3+2x_4+7x_5&=0,\\ 6x_1+4x_2+7x_3+4x_4+5x_5&=0,\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4-11x_5&=0,\\ 6x_1+4x_2+x_3+4x_4-13x_5&=0.\end{aligned}$$

738. $6x_1-2x_2+3x_3+4x_4+9x_5=0,$

$3x_1-x_2+2x_3+6x_4+3x_5=0,$

$6x_1-2x_2+5x_3+20x_4+3x_5=0,$

$9x_1-3x_2+4x_3+2x_4+15x_5=0.$

739. $2x_1+7x_2+4x_3+5x_4+8x_5=0,$

$4x_1+4x_2+8x_3+5x_4+4x_5=0,$

$x_1-9x_2-3x_3+5x_4-14x_5=0,$

$3x_1+5x_2+7x_3+5x_4+6x_5=0.$

740. $3x_1+4x_2+3x_3-9x_4+6x_5=0,$

$9x_1+8x_2+5x_3+6x_4+9x_5=0,$

$3x_1+8x_2+7x_3-30x_4+15x_5=0,$

$6x_1+6x_2+4x_3+7x_4+5x_5=0.$

741. 对方程组

$3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5=0,$

$5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5=0,$

$4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5=0,$

$x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5=0$

而言,以下两矩阵的行是否分别组成基础解系:

$$A=\begin{pmatrix}30 & -24 & 43 & -50 & -5\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 9 & -20 & -3\\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

742. 矩阵

$$\begin{pmatrix}6 & 2 & 3 & -2 & -7\\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4\\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13\\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7\end{pmatrix}$$

的哪些行组成方程组

$$
\begin{aligned}
2x_1-5x_2+3x_3+2x_4+\ x_5&=0,\\
5x_1-8x_2+5x_3+4x_4+3x_5&=0,\\
x_1-7x_2+4x_3+2x_4\qquad\ &=0,\\
4x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4+3x_5&=0
\end{aligned}
$$

的基础解系?

743*. 证明：如果在 $n$ 个未知量的秩为 $r$（此处 $r<n$）的齐次线性方程组的通解中，用 $n-r$ 阶不为零的行列式的每行的数按顺序代替自由未知量，并求出其余未知量的对应值，则就得到一个基础解系，反之，该方程组的任一基础解系可以用此种方法适当地选取 $n-r$ 阶不为零的行列式而得到.

744. 令矩阵

$$
A=\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pn}
\end{pmatrix}
$$

的行组成 $n$ 个未知量 $(n=r+p)$ 的秩为 $r$ 的齐次线性方程组的基础解系. 证明：矩阵

$$
B=\begin{pmatrix}
\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n}\\
\beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\beta_{p1} & \beta_{p2} & \cdots & \beta_{pn}
\end{pmatrix}
$$

的行也组成该方程组的基础解系当且仅当存在 $p$ 阶非奇异矩阵

$$
C=\begin{pmatrix}
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p}\\
\gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2p}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \cdots & \gamma_{pp}
\end{pmatrix}
$$

使得有

$$\beta_{i,k}=\sum_{j=1}^{p}\gamma_{ij}\alpha_{jk}$$

$$(i=1,2,\cdots,p,\ \ k=1,2,\cdots,n).$$

利用矩阵的乘法可以把这些等式写为 $B=CA$.

745. 证明：习题 743 是习题 744 的特殊情形.

746. 证明：如果齐次线性方程组的秩比未知量个数小 1，则该方程组的任何两个解成比例，即只差一数值因子(可以等于零).

747. 利用齐次线性方程组的理论，解习题 509. 即证明：如果 $n>1$ 阶行列式 $D$ 等于零，则任何两行(或列)对应元素的代数余子式成比例.

748* 证明：如果在齐次线性方程组中，方程个数比未知量个数小 1，则可以把从系数矩阵中按次序划掉第一列、第二列等所得到的一组子式并且给这些子式以交错的正负号作为解.

其次证明：如果这个解不是零解，则任何解可由它乘以某数而得到.

利用前题结果，求下列方程组的特解和通解：

749. $5x_1+3x_2+4x_3=0,$

$6x_1+5x_2+6x_3=0.$

750. $4x_1-6x_2+\ 5x_3=0,$

$6x_1-9x_2+10x_3=0.$

751. $2x_1+3x_2+5x_3+6x_4=0,$

$3x_1+4x_2+6x_3+7x_4=0,$

$3x_1+\ x_2+\ x_3+4x_4=0.$

752. $8x_1-5x_2-6x_3+3x_4=0,$

$4x_1-\ x_2-3x_3+2x_4=0,$

$12x_1-7x_2-9x_3+5x_4=0.$

753. 证明：如果线性方程组方程个数比未知量个数大1，为使这方程组是相容的，必要的条件是（但不是充分的）：由未知量的所有系数以及常数项所组成的行列式等于零．证明：如果系数矩阵的秩等于未知量的个数，这一条件也是充分的．

754. 令给定线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

以及它的两个解 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$，还有数 $\lambda$．求一个线性方程组，使得它的未知量的系数与上组相同，但有一个解如下：

(*a*) 所给定的两个解的和

$$\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \cdots,\ \alpha_n+\beta_n;$$

或者

(*b*) 所给的第一个解乘以数 $\lambda$ 的积

$$\lambda\alpha_1,\ \lambda\alpha_2,\ \cdots,\ \lambda\alpha_n.$$

755. 求使得两个解的和或者一个解乘以数 $\lambda\neq1$ 的积仍是同一线性方程组的一个解的充分必要条件．

756. 给定的非齐次线性方程组的任何一些解之给定线性组合，在怎样的条件下，也是该方程组的解？

757. 如果常数项列以及除第一个未知量外的所有未知量的系数列，两两之间仅差数值因子，问：相容线性方程组任何解中的未知量可以取怎样的值？

758. 在怎样的条件下，在相容线性方程组的任何解中，未知量 $x_k$ 有同一个值？

759. 在相容线性方程组的任一解中，第 $k$ 个未知量等于零的充分必要条件是什么？

760. 在怎样的条件下，在方程组

$$
\begin{aligned}
y+az+bt&=0,\\
-x+cz+dt&=0,\\
ax+cy-et&=0,\\
bx+dy+ez&=0
\end{aligned}
$$

的通解中可取 $z$ 和 $t$ 作为自由未知量?

761. 为使 $n$ 个未知量 $s$ 个线性方程的组是相容的且包含 $r$ 个独立方程，其余的方程可由这 $r$ 个方程推出，应当满足多少个彼此独立的条件?

762. 在怎样的条件下，方程组

$$
\begin{aligned}
x&=by+cz+du+ev,\\
y&=cz+du+ev+ax,\\
z&=du+ev+ax+by,\\
u&=ev+ax+by+cz,\\
v&=ax+by+cz+du
\end{aligned}
$$

有非零解?

763*. 在怎样的条件下，实系数的线性方程组

$$
\begin{aligned}
\lambda x+ay+bz+ct&=0,\\
-ax+\lambda y+hz-gt&=0,\\
-bx-hy+\lambda z+ft&=0,\\
-cx+gy-fz+\lambda t&=0
\end{aligned}
$$

有非平凡解?

利用线性方程的理论，解下列问题(只考虑 Descartes 直角坐标系):

764. 求使三点$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，$(x_3,y_3)$位于一直线上的充分必要条件.

765. 写出通过两点$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$的直线方程.

766. 求出三条直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

共点的充分必要条件.

767. 求出使一平面上的 $n$ 个点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 位于一直线上的充分必要条件.

768. 求一平面内的 $n$ 条直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx+b_ny+c_n=0$$

共点的充分必要条件.

769. 求一平面内不在一直线上的四点 $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, $(x_3,y_3)$, $(x_4,y_4)$ 位于一个圆周上的充分必要条件.

770. 写出通过不在一直线上的三点 $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, $(x_3,y_3)$ 的圆周的方程.

771. 写出通过三点 $(1,2)$, $(1,-2)$, $(0,-1)$ 的圆周的方程，并求其圆心和半径.

772.* 证明：通过具有理坐标的三点的圆周，其圆心也有有理坐标.

773. 写出通过五点 $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, $(x_3,y_3)$, $(x_4,y_4)$, $(x_5,y_5)$ 的二次曲线的方程.

774. 求通过五点 $(3,0)$, $(-3,0)$, $(5,6\frac{2}{3})$, $(5,-6\frac{2}{3})$, $(-5,-6\frac{2}{3})$ 的二次曲线的方程并确定其类型.

775. 写出通过五点:

$$(0,1),\ (\pm 2,0),\ (\pm 1,-1)$$

的二次曲线的方程并确定其位置和大小范围.

776. 求四点$(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$, $(x_4, y_4, z_4)$位于一平面内的充分必要条件.

777. 写出通过三点

$$(1,1,1),\ (2,3,-1),\ (3,-1,-1)$$

的平面的方程.

778. 求四个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0$$

共点的充分必要条件.

779. 求$n$个平面

$$a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

通过一直线但不合并为一个平面的充分必要条件.

780. 写出通过不位于一个平面内的四点$(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$, $(x_4, y_4, z_4)$的球面的方程.

781. 写出通过点$(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,0,0)$的球面的方程并求其中心和半径.

782. 怎样的线性方程组, 给出平面上共点的三条不同直线?

783. 怎样的线性方程组, 给出平面上组成三角形的三条直线?

784. 怎样的线性方程组, 给出空间中三个没有公共点但两两相交的平面?

785. 怎样的线性方程组, 给出空间中组成四面体的四个平面?

786. 给以下事实以几何解释：在三个未知量四个方程的线性方程组中，三个方程未知量的系数所组成的所有矩阵的秩，以及增广矩阵的秩都等于3.

787. 研究在解两个和三个未知量的线性方程组时所遇到的所有可能情形，并在每种情形下给该方程组以几何解释.

# 第三章　矩阵和二次型

## § 12. 矩阵的运算

计算下列矩阵的乘积:

788. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.　789. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$.

790. $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

791. $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

792. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -4\\ 3 & -2 & 4 & -3\\ 5 & -3 & -2 & 1\\ 3 & -3 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 8 & 6 & 9\\ 5 & 7 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

793. $\begin{pmatrix}5 & 7 & -3 & -4\\ 7 & 6 & -4 & -5\\ 6 & 4 & -3 & -2\\ 8 & 5 & -6 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix}$.

794. $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$.

795. $\begin{pmatrix}5 & 2 & -2 & 3\\ 6 & 4 & -3 & 5\\ 9 & 2 & -3 & 4\\ 7 & 6 & -4 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & 2\\ -1 & -5 & 3 & 11\\ 16 & 24 & 8 & -8\\ 8 & 16 & 0 & -16\end{pmatrix}$.

796. $\begin{pmatrix}4 & 3\\7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28 & 93\\38 & -126\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$.

797. $\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\-2 & -1 & 2\\3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}70 & 34 & -107\\52 & 26 & -68\\101 & 50 & -140\end{pmatrix}$

$$\times\begin{pmatrix}27 & -18 & 10\\-46 & 31 & -17\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

798. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\-5 & -3 & -4 & 4\\5 & 1 & 4 & -3\\-16 & -11 & -15 & 14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & -2 & 3 & 4\\11 & 0 & 3 & 4\\5 & 4 & 3 & 0\\22 & 2 & 9 & 8\end{pmatrix}$.

计算下列表达式:

799. $\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{pmatrix}^3$.　　800. $\begin{pmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{pmatrix}^5$.

801. $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^n$.　　802. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$.

803. $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}^n$,

其中位于主对角线之外的元素全都等于零。

804. $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^n$.　　805. $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\0 & \lambda\end{pmatrix}^n$.

806. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}^3$.　807. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}^{n-1}$,

(该矩阵的阶是 $n$)。

808. 利用等式

$$\begin{pmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{pmatrix},$$

计算

$$\begin{pmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{pmatrix}^5.$$

809. 利用等式

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & -3\\2 & 3 & -2\\4 & 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 2 & 1\\3 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\1 & 1 & -1\\-2 & -5 & 4\end{pmatrix},$$

计算

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & -3\\2 & 3 & -2\\4 & 4 & -3\end{pmatrix}^6.$$

810. 证明：如果对矩阵 $A$ 和 $B$ 而言，两个乘积 $AB$ 和 $BA$ 存在，并且 $AB=BA$，则矩阵 $A$ 和 $B$ 是方阵且有相同的阶。

811. 如果

(a) 将矩阵 $A$ 的第 $i$ 行和第 $j$ 行交换；

(b) 在矩阵 $A$ 中，将第 $j$ 行乘以数 $c$ 加到第 $i$ 行上去；

(c) 将矩阵 $B$ 的第 $i$ 列和第 $j$ 列交换；

(d) 在矩阵 $B$ 中，将第 $j$ 列乘以数 $c$ 加到第 $i$ 列上去；

问矩阵 $A$ 和 $B$ 的积 $AB$ 分别怎样变化？

812. 利用前题和在初等变换下秩的不变性（参看习题 615），证明：两个矩阵积的秩不大于每个因子的秩。

813. 证明：一些矩阵的积的秩，不大于被连乘矩阵的每一个矩阵的秩。

814. 主对角线元素的和称为方阵的迹。证明：$AB$ 的迹等于 $BA$ 的迹。

815. 证明：如果 $A$ 和 $B$ 是同阶方阵，并且 $AB \neq BA$，则

(a) $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$,

(b) $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$.

816. 证明：如果 $AB=BA$，则

$$(A+B)^n=A^n+nA^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2+\cdots+B^n,$$

此处 $A$ 和 $B$ 是同阶的方阵.

817. 证明：任一方阵 $A$ 可以，并且是唯一地，表为形式 $A=B+C$，此处 $B$ 是对称矩阵，而 $C$ 是斜对称矩阵.

818. 如果 $AB=BA$，则称矩阵 $A$ 和 $B$ 是可换的. 方阵 $A$ 称为纯量矩阵，如果它所有主对角线之外的元素都等于零，而主对角线元素彼此相等，即 $A=cE$，其中 $c$ 是一数，而 $E$ 是单位矩阵. 证明：为使方阵 $A$ 是可换阵(即 $A$ 与所有和它同阶的方阵可换)，必要且充分的条件是：矩阵 $A$ 是纯量矩阵.

819. 方阵 $A$ 称为对角形阵，如果它主对角线之外的所有元素都等于零. 证明：为使方阵 $A$ 与所有对角形阵可换，必要且充分的条件是：矩阵 $A$ 本身是对角形阵.

820. 证明：如果 $A$ 是对角形阵且它主对角线所有元素彼此不同，则任一与 $A$ 可换的矩阵也是对角形阵.

821. 证明：用对角形阵 $B=\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 左乘矩阵 $A$，导致 $A$ 的各行顺次乘以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；而用 $B$ 右乘 $A$ 导致列的类似改变.

求出与以下矩阵可换的所有矩阵：

822. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 823. $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

824. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 825. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

826. 求所有的数 $c$：使非奇异矩阵 $A$ 乘上它后矩阵的行列式不变。

827. 求多项式 $f(x)=3x^2-2x+5$ 在矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

的值 $f(A)$。

828. 求多项式 $f(x)=x^3-7x^2+13x-5$ 在矩阵

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

的值 $f(A)$。

829. 证明：矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 满足方程

$$x^2-(a+d)x+ad-bc=0.$$

830.* 证明：对任何方阵 $A$ 存在不为零的多项式 $f(x)$，使有 $f(A)=0$，并且所有这种多项式可被它们中间的一个所除尽，这一个如限定其最高项系数为 1 还是唯一确定的（它称为矩阵 $A$ 的最小多项式）。

831.* 证明：等式 $AB-BA=E$ 无论对怎样的矩阵 $A$ 和 $B$ 都不成立。

832. 求其平方等于零矩阵的所有二阶矩阵。

833. 令 $A$ 是二阶矩阵，$k$ 是大于 2 的整数。证明：$A^k=0$ 当且仅当 $A^2=0$。

834. 求其平方等于单位矩阵的所有二阶矩阵。

835. 研究方程 $AX=0$，其中 $A$ 是给定的二阶矩阵而 $X$ 是要求的二阶矩阵

求下列矩阵的逆矩阵：

836. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 837. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. 838. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

839. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

840. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. 841. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

842. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. 843. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

844. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 845. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

846. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ 0 & 1 & 1 \cdots 1 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix}$. 847. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 1 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix}$.

848. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

849. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$，(矩阵的阶是 $n+1$)。

850. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

851. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$.

852. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

853. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

854. $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$，(矩阵的阶是 $n$)。

855. $$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

856. 证明：计算给定的 $n$ 阶矩阵 $A$ 的逆矩阵，可以归结为解 $n$ 个线性方程组，其中每一个组都包含 $n$ 个未知量的 $n$ 个方程且未知量的系数矩阵就是矩阵 $A$.

利用习题 856 的方法，求下列矩阵的逆矩阵：

857. $$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

858*. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

859.

$$\begin{pmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \cdots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+h & a+2h & a+3h & \cdots & a+(n-1)h & a \end{pmatrix}.$$

860*. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \cdots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

其中 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$.

解下列矩阵方程:

861. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$. 862. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$.

863. $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$.

864. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

865. $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}$.

866. $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}$.

867. $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$. 868. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 9 & 18\end{pmatrix}$.

869. $\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

870. $\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 9 & 7\\ 1 & 11 & 7\\ 7 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

871. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$.

872. 如果在给定矩阵 $A$ 中,

(a) 将第 $i$ 行和第 $j$ 行交换;

(b) 将第 $i$ 行乘以不等于零的数 $c$;

(c) 将第 $j$ 行乘以数 $c$ 加到第 $i$ 行上去; 问逆矩阵 $A^{-1}$ 分别地怎样变化? 如果对列进行类似的变换, $A^{-1}$ 又怎样变化?

873. 整数方阵,如果它的行列式等于 $\pm 1$,则称为么模矩阵. 证明: 整数矩阵当且仅当该矩阵是么模矩阵时有整数逆矩阵.

874. 证明: 矩阵方程 $AX=B$ 是可解的, 当且仅当矩阵 $A$ 的秩等于矩阵 $(A,B)$ 的秩, 这里用 $(A,B)$ 表示在 $A$ 的右边添写上 $B$ 所得到的矩阵.

875. 证明: 矩阵方程 $AX=0$(其中 $A$ 是方阵)当且仅当 $|A|=0$ 时有非零解.

876. 令 $A$ 和 $B$ 是同阶的非奇异矩阵. 证明: 下列四个等式

$$AB=BA, \qquad AB^{-1}=B^{-1}A,$$

$$A^{-1}B=BA^{-1}, \quad A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

是彼此等价的.

877. 令 $A$ 是方阵, $f(x)$, $g(x)$ 是任何多项式. 证明: 矩阵 $f(A)$ 和 $g(A)$ 是可换的, 即

$$f(A)g(A)=g(A)f(A).$$

878. 令 $A$ 是方阵, 而 $r(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $x$ 的有理函数. 证明: 函数 $r(x)$ 在 $x=A$ 的值 $r(A)$ 是单值确定的当且仅当 $|g(A)|\neq 0$.

879. 求矩阵 $$A=\begin{pmatrix} E_k & U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$$

的逆矩阵, 其中 $E_k$ 和 $E_l$ 分别是 $k$ 阶和 $l$ 阶的单位矩阵, $U$ 是任意的 $(k,l)$ 矩阵(即 $k$ 行 $l$ 列的矩阵), 而其余元素全都等于零.

880. $n$ 阶方阵 $H_k=(h_{ij})$, 其中

$$h_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } j-i=k,\\ 0 & \text{当 } j-i\neq k, k=\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(n-1);\end{cases}$$

$H_k$ 称为 $n$ 阶的第 $k$ 个斜排矩阵. 证明: 如果 $k=1, 2, \cdots, n-1$, 则 $H_1^k=H_k, H_{-1}^k=H_{-k}$; 如果 $k\geqslant n$, 则 $H_1^k=H_{-1}^k=0$.

881. 当用前题的矩阵 $H_1$ 或 $H_{-1}$ 左乘或右乘矩阵 $A$ 时, 问矩阵 $A$ 如何变化?

882. 证明: 矩阵的转置运算具有下列性质:

$(a)$ $(A+B)'=A'+B'$, $(b)$ $(AB)'=B'A'$,

$(c)$ $(cA)'=cA'$, $(d)$ $(A^{-1})'=(A')^{-1}$,

其中 $c$ 是数, 而 $A$ 和 $B$ 是矩阵.

883. 证明: 如果 $A$ 和 $B$ 是同阶对称方阵, 则矩阵

$$C=ABAB\cdots ABA$$

是对称阵.

884. 证明:

$(a)$ 非奇异对称矩阵的逆矩阵是对称矩阵;

$(b)$ 非奇异斜对称矩阵的逆矩阵是斜对称矩阵.

885. 证明: 对任何矩阵 $B$, 矩阵 $A=BB'$ 是对称矩阵.

886. 令 $A^*=\bar{A}'$ 是将 $A$ 转置并把每一个元素用共轭复数来替换所得到的矩阵. 证明:

$(a)$ $(A+B)^*=A^*+B^*$, $(b)$ $(AB)^*=B^*A^*$,

$(c)$ $(cA)^*=\bar{c}A^*$, $(d)$ $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$,

其中 $c$ 是数, 而 $A$ 和 $B$ 是对其实施上述运算的矩阵.

887. 如果 $A^*=A$, 则矩阵 $A$ 称为 Hermite 矩阵. 证明: 对任何复或实元素的矩阵 $B$, 矩阵 $A=B\cdot B^*$ 是 Hermite 矩阵.

888. 证明: 两个对称矩阵的积是对称矩阵当且仅当给定的这两个矩阵是可换的.

889. 证明: 两个斜对称矩阵的积是对称矩阵当且仅当给定

的这两个矩阵是可换的.

890*. 证明：两个斜对称矩阵 $A$ 和 $B$ 的积是斜对称矩阵当且仅当 $AB=-BA$.

举出满足条件 $AB=-BA$ 的斜对称矩阵的例子.

891. $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 称为**正交矩阵**，如果 $AA'=E$，其中 $E$ 是单位矩阵. 证明：下列每一个条件都是方阵 $A$ 为正交矩阵的充分必要条件：

(a) $A$ 的列组成标准正交系，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij},$$

其中 $\delta_{ij}$ 是 Kronecker 记号：当 $i=j$ 时它等于1，当 $i\neq j$ 时它等于 0；

(b) $A$ 的行组成标准正交系，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}.$$

892. 实或复元素的 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 称为**酉矩阵**，如果 $AA^*=E$（记号 $A^*$ 的意义同习题 886）. 证明：下列每一个条件都是方阵 $A$ 为酉矩阵的充分必要条件：

(a) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{a}_{kj}=\delta_{ij}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{jk}=\delta_{ij}$

($\delta_{ij}$ 是 Kronecker 记号).

893. 证明：正交矩阵的行列式等于 $\pm 1$.

894. 证明：酉矩阵的行列式的模等于 1.

895. 证明：如果正交矩阵 $A$ 在主对角线上有方形小块(即子矩阵) $A_1, A_2, \cdots, A_s$，且在这些小块一侧为零，则这些小块另一侧的所有元素也等于零且所有的矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 是正交矩阵.

896. 证明：方阵 $A$ 是正交矩阵的充分必要条件是：它的行列式等于 $\pm1$，并且，如果 $|A|=1$，则它的每一个元素等于自己的代数余子式，如果 $|A|=-1$，则它的每一个元素等于自己的代数余子式乘以 $-1$.

897*. 证明：$n\geqslant3$ 阶的实方阵 $A$，如果它的每一个元素等于自己的代数余子式，且至少有一个元素不为零，则它是正交阵.

898*. 证明：$n\geqslant3$ 阶的实方阵 $A$，如果它的每一个元素等于自己的代数余子式乘以 $-1$，且至少有一个元素不为零，则它是正交阵.

899*. 证明：位于正交矩阵两行（或两列）之所有二阶子式的平方和等于 1.

900*. 证明：位于酉矩阵两行（或两列）之所有二阶子式的模的平方和等于 1.

901*. 证明：位于正交矩阵任何 $k$ 行（或列）之所有 $k$ 阶子式的平方和等于 1.

902*. 证明：位于酉矩阵任何 $k$ 行（或列）之所有 $k$ 阶子式的模的平方和等于 1.

903*. 证明：令 $A$ 是正交矩阵，如果 $|A|=1$，则它的任何阶子式等于该子式的代数余子式，如果 $|A|=-1$，则等于该子式的代数余子式乘以 $-1$.

904*. 令 $A$ 是酉矩阵，$M$ 是它的任何阶子式，$M_A$ 是在矩阵 $A$ 中子式 $M$ 的代数余子式. 证明：$M_A=|A|\cdot\overline{M}$，其中 $\overline{M}$ 是 $M$ 的共轭数.

905. 在怎样的条件下，对角矩阵是正交矩阵？

906. 在怎样的条件下，对角矩阵是酉矩阵？

907. 证明：方阵的下列三个性质中的每一个可从其余两个推出：实阵，正交阵，酉阵.

908. 方阵 $I$ 称为**对合矩阵**，如果 $I^2=E$. 证明：一方阵如果有下列三个性质中的任两个性质，则必有第三个性质：对称阵，正交阵，对合阵.

909. 验证矩阵

(a) $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

具有前题的所有三个性质.

910. 方阵 $P$ 称为**幂等矩阵**，如果 $P^2=P$. 证明：如果 $P$ 是幂等矩阵，则 $I=2P-E$ 是对合矩阵. 反之，如果 $I$ 是对合矩阵，则 $P=\frac{1}{2}(I+E)$ 是幂等矩阵.

911. 证明：

(a) 两个正交矩阵的积是正交矩阵；

(b) 正交矩阵的逆矩阵是正交矩阵.

912. 证明：

(a) 两个酉矩阵的积是酉矩阵；

(b) 酉矩阵的逆矩阵是酉矩阵.

913*. 矩阵 $A$ 的位于第 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_p$ 列交叉处的子式，用

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ j_1, j_2, \cdots, j_p \end{pmatrix}$$

表示. 证明：两个矩阵之积 $C=AB$ 的子式用被相乘矩阵的子式表示的下列表达式是正确的：

$$C\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ j_1, j_2, \cdots, j_p \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_p\leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots i_p \\ k_1, k_2, \cdots k_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1, k_2, \cdots, k_p \\ j_1, j_2, \cdots, j_p \end{pmatrix},$$

$$(i_1<i_2<\cdots<i_p;\ j_1<j_2<\cdots<j_p),$$

如果 $p$ 不超过矩阵 $A$ 的列数，或者说不超过矩阵 $B$ 的行数；否则，矩阵 $C$ 的所有 $p$ 阶子式等于零.

914. 利用前题证明：两个矩阵之积的秩不大于每个因子的秩.

915*. 证明：以非奇异矩阵左乘或右乘矩阵 $A$ 时，$A$ 的秩不变.

916. 位于有同样号码的行和列的交叉处的子式，称为矩阵的主子式. 证明：如果矩阵 $B$ 的元素是实的，则矩阵 $A=BB'$ 的所有主子式是非负的.

917. 证明：对任何复元素或实元素矩阵 $B$，矩阵 $A=BB^*$ 的所有主子式非负，此处 $B^*=\bar{B}'$.

918. 证明：记号同前题，如果 $A=BB^*$，则 $A$ 的秩等于 $B$ 的秩.

919. 证明：矩阵 $AA'$ 的 $k$ 阶主子式之和等于矩阵 $A$ 的所有 $k$ 阶子式的平方和.

920*. 证明：对于 $n$ 阶的任何方阵 $A$ 和 $B$，矩阵 $AB$ 和 $BA$ 的 $k$ 阶 $(1\leqslant k\leqslant n)$ 的所有主子式之和是相等的.

921*. 令 $A$ 是 $n$ 阶实矩阵，$B$ 和 $C$ 分别是由 $A$ 的前 $k$ 列和最后 $n-k$ 列所组成的矩阵. 证明：$|A|^2\leqslant|B'B|\cdot|C'C|$.

922*. 令 $A=(B,C)$ 是实矩阵（记号 $(B,C)$ 的意义如同习题 874）. 证明：$|A'A|\leqslant|B'B|\cdot|C'C|$.

923*. 令 $A=(a_{ij})$ 是 $n$ 阶的实方阵. 证明 Hadamard 不等式：

$$|A|^2\leqslant\prod_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^2.$$

924*. 证明：对 $n$ 行 $m$ 列的任何实长方矩阵 $A=(a_{ij})$，成立不等式：

$$|A'A| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2.$$

925*. 令 $A=(B,C)$ 是复元素矩阵．证明：

$$|A^*A| \leqslant |B^*B| \cdot |C^*C|.$$

926*. 令 $A=(a_{ij})$ 是复元素的 $n$ 阶方阵，其元素的模不超过数 $M$．证明：行列式 $|A|$ 的模不超过 $M^n \cdot n^{\frac{n}{2}}$，并且这个估计是精确的．

927*. 证明：矩阵 $A$ 的每一个初等变换，即下列类型的变换：

(a) 将两行(列)交换；

(b) 用不为零的数 $c$ 乘一行(列)；

(c) 将一行(列)乘以任一数 $c$ 加到另一行(列)上去，

可以用某一个非奇异矩阵 $P$ 左(右)乘矩阵 $A$ 的乘法得到．求出这些矩阵的形式．

928*. 一方阵，如果它位于主对角线一侧的所有元素都等于零，则称为**三角形矩阵**．证明：任何方阵可以表为一些三角形矩阵之积的形式．

929*. 证明：秩为 $r$ 的任何矩阵 $A$ 可以表为乘积 $A=PRQ$ 的形式，其中 $P$ 和 $Q$ 是非奇异矩阵，而 $R$ 是与 $A$ 有同样长宽的长方阵，它的主对角线上前 $r$ 个元素等于 1，其余所有的元素全都等于零．

930*. 令 $A$ 是 $m\times n$ 维矩阵，秩为 $r$；$P=(p_{ij})$ 是 $s\times m$ 维矩阵，其中 $p_{11}=p_{22}=\cdots=p_{ss}=1$，其余元素等于零；$Q=(q_{ij})$ 是 $n\times t$ 维矩阵，其中 $q_{11}=q_{22}=\cdots=q_{tt}=1$，其余元素等于零．证明下列不等式：

(a) $PA$ 的秩$\geqslant k+r-m$;

(b) $AQ$ 的秩$\geqslant l+r-n$;

(c) $PAQ$ 的秩$\geqslant k+l+r-m-n$.

931*. 用 $r_A$ 表示矩阵 $A$ 的秩. 证明: 对于两个 $n$ 阶方阵 $A$ 和 $B$ 之积 $AB$ 的秩, 成立下列不等式(Sylvester 不等式):

$$r_A+r_B-n\leqslant r_{AB}\leqslant r_A, r_B.$$

932. 证明: 对于长方阵 $A$ 和 $B$ 之积 $AB$ 的秩, 当 $n$ 表示矩阵 $A$ 的列数和矩阵 $B$ 的行数时, 上题的 Sylvester 不等式成立.

933*. 证明: 任何非奇异矩阵 $A$ 可以只用行(或只用列)的初等变换化为单位矩阵 $E$. 如果把对 $A$ 所实行的上述初等变换在同样次序下应用于单位矩阵 $E$, 则结果得到的是 $A$ 的逆矩阵 $A^{-1}$.

利用前题的方法, 求下列矩阵的逆矩阵(为简化计算, 把单位矩阵写在给定矩阵 $A$ 的右边, 并对所得这个整个矩阵的行, 进行行的初等变换把左边的 $A$ 化为 $E$):

934. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. 935. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

936. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

937. 利用习题 933 的方法, 求习题 844, 846, 847, 848, 849, 850 中矩阵的逆矩阵.

938*. 证明: 为使 $m$ 行 $n$ 列的矩阵 $A$ 有秩 1, 必要且充分的是: $A$ 可表为形式 $A=BC$, 其中 $B$ 是长为 $m$ 的非零列, $C$ 是长为 $n$ 的非零行.

939*. 证明：为使$m$行$n$列矩阵$A$有秩$r$，必要且充分的是：矩阵$A$可表为形式$A=BC$，其中$B$是$m$行和$r$线性无关列的矩阵，而$C$是$r$线性无关行和$n$列的矩阵.

940. 证明：如果$A$和$B$是$n$阶方阵，且$AB=0$，则$r_A+r_B\leqslant n$，并且对任一个给定的矩阵$A$可以选择矩阵$B$使得$r_A+r_B=k$，其中$k$是满足条件$r_A\leqslant k\leqslant n$的任何整数.

941*. 证明：如果$A$是$n$阶方阵，$A^2=E$，则$r_{E+A}+r_{E-A}=n$.

942. 两个整数矩阵称为等价的，如果其中之一可以用整数初等变换，即用下列类型的变换，变为另一个：

(a) 交换两行；

(b) 将一行乘以$-1$；

(c) 将一行乘以整数$c$加到另一行上去；以及关于列的类似变换，证明：矩阵$A$和$B$等价当且仅当$B=PAQ$，其中$P$，$Q$是整数幺模方阵.

943. 长方形整数矩阵$A$称为**法式的**，如果它的元素$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{rr}$是正的，$a_{ii}$被$a_{i-1,i-1}$所整除$(i=2, 3, \cdots, r)$，而所有其余元素等于零. 证明：每一个整数矩阵等价于一个且仅一个法式矩阵；换言之，每一类彼此等价的整数矩阵中包含一个且只包含一个法式矩阵.

944*. 证明：每一个非奇异整数矩阵$A$可以表为形式$A=PR$，其中$P$是整数幺模矩阵，而$R$是三角形整数矩阵，它的主对角线元素是正的，主对角线以下元素为零，而主对角线以上的元素非负并小于同列的主对角线元素；同时，这种表示法是唯一的.

945*. 证明：$n$阶秩为$r$的方阵$A$，可以表为形式$A=PR$，其中$P$是非奇异矩阵，而$R$是三角形矩阵，它的前$r$个主对角线元素等于1，而主对角线以下所有元素与最后$n-r$行的所有元素等于零.

946. 方阵称为**上(下)三角形的**，如果位于主对角线以下(以上)的所有元素等于零. 证明：对上(下)三角形矩阵进行下列运算仍得到上(下)三角形矩阵：

(1) 两个矩阵相加；

(2) 用数乘矩阵；

(3) 两个矩阵相乘；

(4) 非奇异矩阵的逆矩阵.

947. 方阵称为**幂零阵**，如果该矩阵的某次幂等于零. 使 $A^k=0$ 成立的最小正整数 $k$ 称为矩阵 $A$ 的**幂零指数**. 证明：三角形矩阵是幂零阵当且仅当所有的主对角线元素等于零，并且三角形矩阵的幂零指数不超过矩阵的阶.

948. 证明：$n$ 阶上(下)三角形非奇异矩阵 $A=(a_{ik})$ 的逆矩阵 $B=(b_{ik})$ 也是上(下)三角形矩阵，并且矩阵 $B$ 的主对角线元素为 $b_{ii}=\frac{1}{a_{ii}}(i=1,2,\cdots,n)$，而其余元素从以下递推关系式求得：

($a$) 对于上三角形矩阵的第 $i$ 行的元素：

$$b_{ik}=\frac{-\sum\limits_{j=i}^{k-1}b_{ij}a_{jk}}{a_{kk}}\quad(k=i+1,\ i+2,\ \cdots,n);$$

($b$) 对于下三角形矩阵的第 $k$ 列元素：

$$b_{ik}=\frac{-\sum\limits_{j=k}^{i-1}a_{ij}b_{jk}}{a_{ii}}\quad(i=k+1,k+2,\cdots,n).$$

利用这些公式计算三角形矩阵的逆矩阵是方便的.

949*. 令 $A$ 是 $n$ 阶方阵，秩为 $r$，并且令

$$d_k=A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,k\\1,2,\cdots,k\end{pmatrix}\neq 0\quad(k=1,2,\cdots,r).\qquad(1)$$

证明：在这些条件下，矩阵 $A$ 可以表为乘积的形式

$$A=BC, \tag{2}$$

其中 $B=(b_{ij})$ 和 $C=(c_{ij})$ 分别是下三角形矩阵和上三角形矩阵（上三角形矩阵和下三角形矩阵的定义见习题 946）.

矩阵 $B$ 和 $C$ 的前 $r$ 个对角线元素可以给以满足以下条件的任何值：

$$b_{kk}c_{kk}=\frac{d_k}{d_{k-1}} \quad (k=1, 2, \cdots, r; d_0=1). \tag{3}$$

给出矩阵 $B$ 和 $C$ 的前 $r$ 个对角线元素就单值地决定了矩阵 $B$ 的头 $r$ 列的其余元素和矩阵 $C$ 的头 $r$ 行的其余元素；并且这些元素由以下公式给出：

$$b_{ik}=b_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1, 2, \cdots, k-1, i\\ 1, 2, \cdots, k-1, k\end{pmatrix}}{d_k}, \tag{4}$$

$$c_{ki}=c_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1, 2, \cdots, k-1, k\\ 1, 2, \cdots, k-1, i\end{pmatrix}}{d_k}$$

$$(i=k+1, k+2, \cdots, n; k=1, 2, \cdots, r).$$

在 $r<n$ 的情形，矩阵 $B$ 的最后 $n-r$ 列的所有元素可以认为等于零，而矩阵 $C$ 的最后 $n-r$ 行的元素可以任意；或者反过来，矩阵 $B$ 的最后 $n-r$ 列的元素可以任意，而矩阵 $C$ 的最后 $n-r$ 行的所有元素认为是等于零.

任意元素不会破坏等式(2). 它们可以这样选择，以使得保持矩形 $B$ 和 $C$ 的三角形形式.

950. 证明：前题的表达式(2)可以如下去求：任意选择满足条件(3)者作为矩阵 $B$ 和 $C$ 主对角线的前 $r$ 个元素，而矩阵 $B$ 前 $r$ 列和 $C$ 前 $r$ 行的其余元素由以下递推公式计算：

$$b_{ik}=\frac{a_{ik}-\sum_{j=1}^{k-1}b_{ij}c_{jk}}{c_{kk}},$$

$$(i=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ r);$$

$$c_{ik}=\frac{a_{ik}-\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}c_{jk}}{b_{ii}},$$

$$(k=i+1,\ i+2,\ \cdots,\ n;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r).$$

这些公式首先求出$B$的第一列和$C$的第一行，然后，一般地，当知道了$B$的$k-1$列和$C$的$k-1$行时，求出$B$的第$k$列和$C$的第$k$行.

951*. 证明：满足习题949条件(1)的任一$n$阶的秩为$r$的对称矩阵$A=(a_{ij})$，可以表为形式$A=BB'$，其中$B$是下三角形矩阵，它的后$n-r$列的元素等于零，而前$r$列元素由以下公式决定：

$$b_{ik}=\frac{A\begin{pmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ k-1,\ i\\1,\ 2,\ \cdots,\ k-1,\ k\end{pmatrix}}{\sqrt{d_k\cdot d_{k-1}}}$$

$$(i=k,\ k+1,\ \cdots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ r).$$

952. 矩阵$A$称为**分块的**，如果用一条或若干条水平的和铅垂的线段把它的元素分配在一些矩形小块中. 这些小块用$A_{ij}$表示，其中$i$是"小块行"的号码，$j$是"小块列"的号码. 证明：两个分块矩阵的乘法可以把小块看成单个的元素而归结为小块的相乘当且仅当：第一个矩阵的铅垂分法对应着第二个矩阵的水平分法. 就是：如果$A=(A_{ij})$是行按$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_s$分组而列按$n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_t$分组的$m\times n$维矩阵，$B=(B_{ij})$是行按$n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_t$分组而列按$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_u$分组的$n\times p$维矩阵，则$AB=C=(C_{ij})$也是分块矩阵，并且

$$C_{ik}=\sum_{j=1}^{t}A_{ij}B_{jk}\quad(i=1,2,\cdots,s;k=1,2,\cdots,u).$$

应用上面所指出的分块矩阵相乘法则，求下列两矩阵积的小块，其中两矩阵的小块分法已给如下：

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}1&-2&3\\3&-1&2\\\hline 4&-2&1\end{array}\right),\qquad B=\left(\begin{array}{c|cc}2&3&1\\\hline 1&2&3\\2&1&3\end{array}\right).$$

953. 证明：为使两个分块方阵的乘法可行，充分的条件是（但是，如前题的例子所表明，条件不是必要的）：对角线小块是方形的，并且对应的对角线小块的阶数彼此相等.

954*. 证明：为使分块矩阵自乘的分块乘法可行，充分必要条件是：它的所有对角线小块是方阵.

955. 分块方阵 $A=(A_{ij})$ 称为**分块三角形的**，如果它所有主对角线小块，即 $A_{11}, A_{22}, \cdots$ 是方阵，而位于主对角线某一侧的所有小块等于零. 证明：如果 $A$ 和 $B$ 是两个分块三角形矩阵，其对应的对角线小块的阶数相同，且对角线同一侧的小块为零，则它们的乘积 $AB$ 也是分块三角形矩阵，对角线小块阶数与 $A$, $B$ 的一样，且与 $A, B$ 同样的对角线一侧的小块为零.

956. 证明：分块三角形矩阵是幂零阵当且仅当：它的所有主对角线小块都是幂零阵（幂零阵的定义见习题 947）.

957. 令 $A=(A_{ij})$ 是分块矩阵，并且 $A_{ij}$ 是 $m_i\times n_j$ 维的小块 $(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$. 证明：用 $m_i\times m_j$ 维长方阵 $X$ 左乘第 $j$ 个小块行加到第 $i$ 个小块行上去，这个变换可以用一个非奇异分块方阵 $P$ 左乘 $A$ 而得出. 同样地，用 $n_j\times n_i$ 维长方阵 $Y$ 右乘第 $j$ 个小块列加到第 $i$ 个小块列上去这一变换可以用非奇异分块方阵 $Q$ 右乘 $A$ 而得到. 求出矩阵 $P$ 和 $Q$ 的形式.

958*. 令 $R=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ 是分块矩阵，其中 $A$ 是非奇异 $n$ 阶方

阵. 证明: $R$的秩等于$n$当且仅当$D=CA^{-1}B$.

959*. 令$A$是$n$阶非奇异矩阵, $B$是$n\times q$维矩阵, $C$是$p\times n$维矩阵. 证明: 如果分块矩阵$R=\begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}$用一连串行的初等变换化为形式如下的矩阵$R_1=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, 并且在每一个变换中或者只涉及前$n$行, 或者是用数乘前$n$行中某一行加到号码大于$n$的某一行上去, 则$X=CA^{-1}B$.

960. 令$A$是$n$阶非奇异矩阵, 而$E$是同阶的单位矩阵. 证明: 如果分块阵$\begin{pmatrix} A & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$用前题所指初等变换化为形式$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, 则$X=A^{-1}$. 用这种方法求$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

961. 令给定方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ &\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n, \end{aligned}$$

它的系数矩阵$A$是非奇异的, $B$是它的自由项所成的列, $E$是$n$阶单位矩阵.

证明: 如果分块矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$用习题959中所指变换化为形式$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, 则列$X$给出该方程组的解.

用这个方法解下面的方程组:

$$3x-y+2z=7,$$

$$4x-3y-2z=4,$$
$$2x+y+3z=13.$$

962. 令 $A$ 是 $n$ 阶非奇异矩阵，$B$ 是 $n\times p$ 维矩阵，$E$ 是 $n$ 阶单位矩阵. 证明：如果矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ 用习题 959 所指变换化为形式 $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$，则矩阵 $X$ 给出矩阵方程 $AX=B$ 的解.

如果

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

用本题所述方法解方程 $AX=B$.

963*. 令所有数对 $(i, j)$ $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 在某种确定的次序下被编号为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{mn}$. 所谓 $m$ 阶方阵 $A$ 和 $n$ 阶方阵 $B$ 的 Kronecker 乘积(或称**直接积**)，是指一个 $mn$ 阶矩阵，记为 $C=A\times B$，它是由矩阵 $A$ 和 $B$ 的元素的所有可能的乘积适当排列而成. 具体说来就是：矩阵 $C$ 位于第 $i$ 行第 $j$ 列的元素如下决定：

$$c_{ij}=a_{i_1j_1}b_{i_2j_2},$$

其中 $(i_1, i_2)=\alpha_i$，$(j_1, j_2)=\alpha_j$.

证明：

(a) $(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$,

(b) $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$,

(c) $(AB)\times(CD)=(A\times C)(B\times D)$.

964*. $m$ 阶方阵 $A$ 和 $n$ 阶方阵 $B$ 的**右直接积**，是指分块矩阵 $A\times' B=C=(C_{ij})$，其中 $C_{ij}=a_{ij}B$ $(i, j=1, 2, \cdots, m)$. 类似地，该两矩阵的左直接积是指分块矩阵 $A'\times B=D=(D_{ij})$，其中 $D_{ij}=Ab_{ij}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$.

证明:

(a) 上述左、右直接积是前题 Kronecker 乘积的特殊情形. 求得出右, 左直接积的数对$(i, j)$的编号次序;

(b) $A\times{}^{\cdot}B = B^{\cdot}\times A$;

(c) $A\times^{\cdot}(B\times{}^{\cdot}C) = (A\times B)\times{}^{\cdot}C$;

(d) 如果 $E_k$ 是 $k$ 阶单位矩阵, 则 $E_m\times{}^{\cdot}E_n = E_n\times{}^{\cdot}E_m = E_{mn}$;

(e) 如果 $A$ 和 $B$ 是非奇异矩阵, 则$(A\times{}^{\cdot}B)^{-1} = A^{-1}\times{}^{\cdot}B^{-1}$.

对于左直接积, 与性质(c), (d), (e)类似的性质也是对的.

965*. 利用前两题, 证明: 如果 $A$ 是$m$阶矩阵, 而 $B$ 是 $n$ 阶矩阵, 则$|A\times B| = |A|^n\cdot|B|^m$(参看习题 540).

966*. 令 $A=(a_{ij})$是 $n$ 阶方阵, 被称为矩阵 $A$ 的**伴随矩阵**(或称**转置伴随矩阵**)的是矩阵 $\hat{A}=(\hat{a}_{ij})$, 其中 $\hat{a}_{ij}=A_{ji}$, $(i, j=1, 2, \cdots, n)$. 换句话说, $A$ 的伴随矩阵是由矩阵 $A$ 的元素的代数余子式所组成的矩阵经过转置而得到的.

证明:

(a) $A\hat{A}=\hat{A}A=|A|E$, 其中 $E$ 是单位矩阵;

(b) 当 $n>2$ 时$(\hat{\hat{A}}) = |A|^{n-2}A$; 当 $n=2$ 时$(\hat{\hat{A}}) = A$.

967*. 证明: $(\widehat{AB}) = \hat{B}\cdot\hat{A}$, 其中 $\hat{A}$ 是前题所定义的、$A$ 的伴随矩阵.

968*. 矩阵$\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$, 其中 $\tilde{a}_{ij}$ 是 $n$ 阶方阵 $A$ 的元素 $a_{ij}$ 的子式, 称为 $n$ 阶方阵 $A$ 的**相伴矩阵**. 证明:

(a) $(\widetilde{AB}) = \tilde{A}\tilde{B}$;

(b) 当 $n>2$ 时$(\tilde{\tilde{A}}) = |A|^{n-2}A$; 当 $n=2$ 时$(\tilde{\tilde{A}}) = A$.

969*. 令 $A=(a_{ij})$是 $n$ 阶方阵, 又令由 $n$ 个数 $1, 2, \cdots, n$ 中取 $p$ 个数 $k_1<k_2<\cdots<k_p$ 的所有组合被在某种次序下编号为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$, 其中 $N=C_n^p$. 矩阵 $A$ 的 $p$ 级相伴矩阵是指矩阵 $A_p=$

$(a_{i,j;p})$，它是将矩阵 $A$ 的 $p$ 阶子式适当排列所得出的矩阵；就是：$a_{i,j;p}=A\begin{pmatrix}i_1, i_2, \cdots, i_p\\ j_1, j_2, \cdots, j_p\end{pmatrix}$，其中 $\alpha_i$ 是组合 $i_1<i_2<\cdots<i_p$；$\alpha_j$ 是组合 $j_1<j_2<\cdots<j_p$.

证明：

(a) $(AB)_p=A_pB_p$;

(b) $(E_n)_p=E_N$，其中 $E_n$ 和 $E_N$ 分别是 $n$ 阶和 $N$ 阶的单位矩阵；

(c) 如果 $A$ 是非奇异矩阵，则 $(A^{-1})_p=(A_p)^{-1}$.

970. 求出 $n$ 个数 $1, 2, \cdots, n$ 取 $p$ 个的组合的一种编号，使三角形矩阵 $A$ 的相伴矩阵 $A_p$（定义见前题）也是三角形矩阵且在对角线同样的一侧为零.

971*. 利用相伴矩阵的性质，证明：如果 $A$ 是 $n$ 阶方阵，则 $|A_p|=|A|^{C_{n-1}^{p-1}}$（参看习题 551）.

972*. 令 $A$ 是 $n$ 阶非奇异矩阵，而 $B=A^{-1}$ 是 $A$ 的逆矩阵. 证明：逆矩阵的任何阶子式可用原矩阵的子式表示如下：

$$B\begin{pmatrix}i_1, i_2, \cdots, i_p\\ k_1, k_2, \cdots, k_p\end{pmatrix}=\frac{(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{p}(i_s-k_s)}A\begin{pmatrix}k_1', k_2', \cdots, k_{n-p}'\\ i_1', i_2', \cdots, i_{n-p}'\end{pmatrix}}{|A|}, \quad (1)$$

其中 $i_1<i_2<\cdots<i_p$ 与 $i_1'<i_2'<\cdots<i_{n-p}'$，$k_1<k_2<\cdots<k_p$ 与 $k_1'<k_2'<\cdots<k_{n-p}'$ 各构成指标 $1, 2, \cdots, n$ 的全组.

973*. 证明：正交矩阵 $A$ 的 $p$ 级相伴矩阵 $A_p$（定义见习题 969）是正交的.

974*. 证明：酉矩阵 $A$ 的 $p$ 级相伴矩阵是酉矩阵.

## § 13. 多项式矩阵

用初等变换把下列 λ 矩阵化为法对角形:

975. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. 976. $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$.

977. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+5 \end{pmatrix}$. 978. $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$.

979. $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}$.

980. $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$.

981. $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

982. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$.

983. $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

984*. $n$ 阶 $\lambda$ 矩阵 $A$ 的**不变因子**, 是指在矩阵 $A$ 的法对角形下位于主对角线上的多项式 $E_1(\lambda), E_2(\lambda), \cdots, E_n(\lambda)$. 而所谓矩阵 $A$ 的子式因子, 是指多项式 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_n(\lambda)$, 其中 $D_k(\lambda)$ 是矩阵 $A$ 的 $k$ 阶子式的最大公因子 (取最高项的系数等于 1), 如果这些子式不全为零; 否则, $D_k(\lambda)=0$.

证明: $E_k(\lambda)\neq 0$ 和 $D_k(\lambda)\neq 0$, 当 $k=1, 2, \cdots, r$, 其中 $r$ 是矩

阵 $A$ 的秩，而 $E_k(\lambda)=D_k(\lambda)=0$，当 $k=r+1, \cdots, n$.

其次证明：$E_k(\lambda)=\dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$，$(k=1,2,\cdots,r; D_0=1)$.

藉助于子式因子(定义见习题 984) 把下列 $\lambda$ 矩阵化为法对角形：

985. $$\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}.$$

986. $$\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{pmatrix}.$$

987.
$$\begin{pmatrix} (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) \end{pmatrix}$$

988. $$\begin{pmatrix} a^2cd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2cd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abd^2 \end{pmatrix},$$

其中 $a, b, c, d$ 是 $\lambda$ 的两两互素的多项式.

989. $\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}$，其中 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 是 $\lambda$ 的多项式.

990. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & fg \\ 0 & fh & 0 \\ gh & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $f,g,h$ 是 $\lambda$ 的多项式，它们两两互素且首项系数等于 1.

991. $\begin{pmatrix} fg & 0 & 0 \\ 0 & fh & 0 \\ 0 & 0 & gh \end{pmatrix}$，其中 $f,g,h$ 是 $\lambda$ 的首项系数等于 1 的多项式，它们总体互素但不一定两两互素。

992. $\begin{pmatrix} fg & 0 & 0 \\ 0 & fh & 0 \\ 0 & 0 & gh \end{pmatrix}$，其中 $f,g,h$ 是 $\lambda$ 的任何多项式，它们的首项系数等于 1.

993. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.　994. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

995. $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda \end{pmatrix}$.

996. $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$.

997. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2-12\lambda+16 & 2-\lambda & 2\lambda^2-12\lambda+17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix}$.

998. $\begin{pmatrix} 3\lambda^2-5\lambda+2 & 0 & 3\lambda^2-6\lambda+3 \\ 2\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda-1 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \\ 2\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

999. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$.

查明以下矩阵是否等价:

1000.

$$A=\begin{pmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2-2\lambda \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1001.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

1002.

$$A=\begin{pmatrix} 3\lambda^3-6\lambda^2-\lambda+3 & 2\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda \\ 3\lambda^2-8\lambda+5 & 2\lambda^2-4\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 3\lambda^3-3\lambda^2-5\lambda+6 & 2\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 3\lambda^3-9\lambda^2+7\lambda+1 & 2\lambda^3-6\lambda^2+7\lambda-2 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+9\lambda-5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda-1 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+5\lambda+5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-2 \\ \multicolumn{2}{c}{\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1} \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 3\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 2\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda-3\lambda^2-4 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 5\lambda^2-7\lambda+3 & 5\lambda-2\lambda^2-3 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

1003. $\lambda$ 矩阵称为**幺模的**，如果它的行列式是关于 $\lambda$ 的零次多项式，即是一个不为零的常量. 求幺模 $\lambda$ 矩阵的法对角形.

1004. 证明：$\lambda$ 矩阵的逆矩阵是 $\lambda$ 矩阵当且仅当所给定的矩阵 $A$ 是幺模的.

1005*. 证明下列断言：为使两个 $m$ 行 $n$ 列的长方 $\lambda$ 矩阵 $A$ 和 $B$ 是等价的，必要且充分的条件是成立等式 $B=PAQ$，其中 $P$ 和 $Q$ 分别是 $m$ 阶和 $n$ 阶的幺模 $\lambda$ 矩阵. 证明：矩阵 $P$ 和 $Q$ 可以如下求得：求出把 $A$ 化成 $B$ 的那一系列初等变换之后，把所有行的变换在同样次序下应用于 $m$ 阶的单位矩阵 $E_m$，而把所有列的变换在同样次序下应用于 $n$ 阶的单位矩阵 $E_n$.

对以下所给定的 $\lambda$ 矩阵 $A$，应用习题 1005 所指出的方法求幺模矩阵 $P, Q$，使得矩阵 $B=PAQ$ 有法对角形（矩阵 $P$，$Q$ 不唯一确定）：

1006. $$A=\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda+4 & \lambda^2+3 \\ \lambda^2-2\lambda+3 & \lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}.$$

1007. $$A=\begin{pmatrix} \lambda^4+4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+2 & \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda \\ \lambda^4+5\lambda^3+8\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+5\lambda^2+8\lambda+4 \end{pmatrix}.$$

1008. $$A=\begin{pmatrix} \lambda^4+3\lambda^3-5\lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^4+3\lambda^3-5\lambda^2+\lambda-1 \\ \lambda^4-\lambda^3+1 & 2\lambda^4-\lambda^3-\lambda^2 \\ \lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda-1 \\ 2\lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2 \\ 2\lambda^4-2\lambda^3 \\ 2\lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

对以下所给定的 $\lambda$ 矩阵 $A$ 和 $B$，求幺模 $\lambda$ 矩阵 $P$ 和 $Q$ 满足等式 $B=PAQ$(矩阵 $P$ 和 $Q$ 不是唯一确定的，参看习题1005)：

1009. $$A=\begin{pmatrix} 2\lambda^2-\lambda+1 & 3\lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 3\lambda^3+7\lambda+2 & 3\lambda^2+4\lambda-1 \\ 2\lambda^3+5\lambda+1 & 2\lambda^3+3\lambda-1 \end{pmatrix}.$$

1010. $$A=\begin{pmatrix} 2\lambda^2-\lambda-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^3-\lambda \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 \\ \lambda^3-\lambda^2 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}.$$

1011. $$A=\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda-1 & \lambda+1 & \lambda^2-2 \\ \lambda^3+2\lambda^2 & \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ \lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-2\lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 2\lambda^2-2\lambda-3 \\ 10\lambda+2 & 5\lambda+5 & 5\lambda^2-5\lambda-2 \\ 4\lambda^2-7\lambda-8 & 2\lambda^2-3\lambda-5 & 2\lambda^3-7\lambda^2+2\lambda+8 \end{pmatrix}.$$

1012.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2-\lambda-1 & 2\lambda^2+2\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2 & 5\lambda^2+5\lambda & 2\lambda^3+2\lambda^2 \\ \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 2\lambda^2+3\lambda+1 & \lambda^3+3\lambda^2+2\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 3\lambda^2+5\lambda+2 & 2\lambda^3+5\lambda^2+3\lambda & 2\lambda^3+2\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

**1013.**
$$A=\begin{pmatrix} \lambda^2+3\lambda-4 & \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 \\ 2\lambda^2+3\lambda-5 & 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 2\lambda^2+2\lambda-4 & 3\lambda^2+2\lambda-5 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 2\lambda^2+\lambda-3 & 3\lambda^2+\lambda-4 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

**1014.**
$$A=\begin{pmatrix} \lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+5 & \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1 \\ 2\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1 & 2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 \\ 3\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-1 & 6\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-4 \\ \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda-3 \end{pmatrix}.$$

求下列λ矩阵的不变因子:

**1015.**
$$\begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2-3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

**1016.**
$$\begin{pmatrix} 3\lambda^3-2\lambda+1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-2\lambda & \lambda^2-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ 5\lambda^3-4\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

**1017.**
$$\begin{pmatrix} 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3 \\ \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & \lambda^3-3\lambda^2+\lambda-3 \\ \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^3+\lambda \\ 3\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda-2 & 3\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda-2 \\ -\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda^3-\lambda^2+7\lambda-1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & -2\lambda^3-\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3 & 6\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-3 \end{pmatrix}.$$

1018. $$\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 & \lambda^4-\lambda^2+\lambda \\ \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+6 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-2 \\ \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-4 & \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+5 & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda-4 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda+2 \\ 2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+7 & \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda-4 \\ 2\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+5 & \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+3 \\ 4\lambda^3-\lambda^2-\lambda+7 & 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 \end{pmatrix}.$$

1019. $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & \lambda & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

1020*. $$\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \lambda-\alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha \end{pmatrix}$$

(矩阵的阶是 $n$).

把 $\lambda$ 矩阵 $A$ 的不变因子 $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $\cdots$, $E_n(\lambda)$ 分解成不可约因子方幂的积，包含在各分解式中的各不可约因子的最高次方幂，设为多项式 $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, $\cdots$, $e_s(\lambda)$ (要求首项系数等于1)，它们称为 $\lambda$ 矩阵 $A$ 的初等因子. 同时，有多少个不变因子 $E_k(\lambda)$ 在自己的分解式中包含 $e_i(\lambda)$，则 $e_i(\lambda)$ 在初等因子组中就重复多少次. 作为矩阵 $A$ 的元素的多项式是在哪个域上考虑的，就在哪个域上进行不可约因子的分解. 在下面如无另外说明，将在复数域上考察初等因子，此时初等因子是把矩阵 $A$ 的各不变因子分解为线性因子时所包含形如 $\lambda-\alpha$ 的多项式的最高次方幂.

求下列 $\lambda$ 矩阵的初等因子:

1021. $\begin{pmatrix} \lambda^3+2 & \lambda^3+1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1022. $\begin{pmatrix} \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}$.

1023. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 2\lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1024. $\begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda-8 & \lambda^2+4\lambda+4 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda-10 & 2\lambda^2+5\lambda+2 \\ \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda-6 & \lambda^2-4\lambda+4 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2-\lambda-2 \\ \lambda^2-4 & \lambda^2-3\lambda-10 \\ \lambda^3+3\lambda^2-\lambda-6 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda-12 \\ \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4-\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda-8 \\ \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}$.

1025.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2+\lambda+3 & \lambda^2-2 & \lambda^2-3 \\ \lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2+3\lambda-2 \\ 2\lambda^2-4 & \lambda^2+\lambda-4 & \lambda^2+3 & 2\lambda^2-5 \\ 2\lambda^2+3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 & \lambda^2+2\lambda+2 & 2\lambda^2+3\lambda-4 \end{pmatrix}.$$

在有理数域, 实数域, 复数域中求下列 $\lambda$ 矩阵的初等因子:

1026. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5 \end{pmatrix}$.

1027. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & \lambda^6+6\lambda^4+\lambda^2+2 \\ 4\lambda^2+11 & 2\lambda^2+5 & 2\lambda^6+12\lambda^4+2\lambda^2+26 \\ 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & 2\lambda^6+12\lambda^4+\lambda^2-30 \end{pmatrix}$.

1028.

$$\begin{pmatrix} \lambda^4+1 & \lambda^7-\lambda^4+\lambda^3-1 & \lambda^4-4\lambda^3+4\lambda-5 \\ 2\lambda^4+3 & 2\lambda^7-2\lambda^4+4\lambda^3-2 & 3\lambda^4-10\lambda^3-\lambda^2+10\lambda-14 \\ \lambda^4+2 & \lambda^7-\lambda^4+2\lambda^3-2 & 2\lambda^4-6\lambda^3-\lambda^2+6\lambda-9 \end{pmatrix}.$$

求 $\lambda$ 方阵的法对角形, 如果已知它的初等因子, 秩 $r$ 以及阶 $n$ 如下:

1029. $\lambda+1, \lambda+1, (\lambda+1)^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2; r=4, n=5$.

1030. $\lambda+2, (\lambda+2)^2, (\lambda+2)^3, \lambda-2, (\lambda-2)^3; r=n=4$.

1031. $\lambda-1, \lambda-1, (\lambda-1)^3, \lambda+2, (\lambda+2)^2; r=4, n=5$.

1032*. 证明: 对角形的 $\lambda$ 矩阵的初等因子组, 由这个矩阵的所有对角线元素的初等因子组合并(带有适当的重复)而得到.

1033*. 证明: 分块对角形 $\lambda$ 矩阵的初等因子组等于它所有对角线小块的初等因子组的并(带有适当的重复).

利用习题 1032 或 1033, 求下列 $\lambda$ 矩阵的法对角形:

1034. $$\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^3 \end{pmatrix}.$$

1035. $$\begin{pmatrix} \lambda^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda \end{pmatrix}.$$

1036.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^3+6\lambda^2+9\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda^4+\lambda^3-6\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1037.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^4+2\lambda^3-2\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^3+2\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1038.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2-2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1039.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda & \lambda^2+6\lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+5\lambda-7 \end{pmatrix}.$$

1040.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3-2\lambda-4 \\ 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2-6\lambda & \lambda^2+\lambda-6 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ \lambda^3-2\lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1041.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda-4 & \lambda^3-2\lambda^2-3 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^3+\lambda^2-9\lambda-9 & \\ \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-6 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

定义了整数矩阵的等价性和法对角形之后（参看习题942，943），用藉助于初等变换把矩阵化为法对角形的方法，求下列矩阵 $k$ 阶子式的最大公因子 $D_k$：

1042. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 12 & 14 & 5 \\ 0 & 4 & 14 & -1 \\ 10 & 6 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.　　1043. $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -9 & -3 \\ 12 & 24 & 9 & 9 \\ 30 & 42 & 45 & 27 \\ 66 & 78 & 81 & 63 \end{pmatrix}$.

1044. 说明：任何秩为 $r$ 的 $\lambda$ 矩阵，可仅用行（或仅用列）的一些初等变换化为三角形或梯形的形式，并且主对角线之上或之下为零可随意，而不为零的元素仅位于前 $r$ 行（或前 $r$ 列）。

1045*. 证明：每一个非奇异 $\lambda$ 矩阵 $A$ 可以表为形式 $A=PR$，其中 $P$ 是幺模 $\lambda$ 矩阵，而 $R$ 是三角形 $\lambda$ 矩阵，它的主对角线元素首项系数等于1，主对角线下面的元素等于零，而主对角线以上的元素的次数小于同列主对角线元素的次数（或者等于零）；并且这种表示法是唯一的。

## §14. 相似矩阵．特征多项式和最小多项式．矩阵的 Jordan 形和对角形．矩阵函数

本节所有习题在矩阵形式下提出．特别当研究矩阵特征根（特征值）的性质和化矩阵为 Jordan 形时，并不涉及相应的线性变换的特征向量和不变子空间的性质．它们之间的这种联系（特别地，寻求一基底使得在这基底下给定的线性变换的矩阵有 Jordan 形）在第四章研究．当已学习了线性变换和它在某已给基底下的矩阵之间的联系，而去研究线性变换的性质时，也可以利用本节习题．

1046. 称矩阵 $A$ 与矩阵 $B$ 相似（用 $A\sim B$ 表示），如果存在非奇异矩阵 $T$，使有 $B=T^{-1}AT$．证明：相似关系具有下列性质：

(a) $A\sim A$;

(b) 如果 $A\sim B$, 则 $B\sim A$;

(c) 如果 $A\sim B$ 和 $B\sim C$, 则 $A\sim C$.

1047. 证明：如果两个矩阵 $A$, $B$ 中至少有一个是非奇异的，则矩阵 $AB$ 和 $BA$ 相似.

举出两个奇异矩阵 $A$, $B$, 使得矩阵 $AB$ 和 $BA$ 不相似.

1048*. 求出只有自己与自己相似的所有矩阵.

1049. 令矩阵 $B$ 是从 $A$ 交换第 $i$ 行和第 $j$ 行，还交换第 $i$ 列和第 $j$ 列所得到的. 证明：$A$ 和 $B$ 相似, 并求非奇异矩阵 $T$, 使得 $B=T^{-1}AT$.

1050*. 从矩阵 $A$ 作中心反射得到矩阵 $B$, 证明 $A$ 和 $B$ 相似.

1051. 令 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是数 $1, 2, \cdots, n$ 的任何一个排列, 证明：矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 和 \quad B=\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_n} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_ni_1} & a_{i_ni_2} & \cdots & a_{i_ni_n} \end{pmatrix}$$

相似.

1052. 令给定两个彼此相似的矩阵 $A$ 和 $B$. 证明：使得 $B=T^{-1}AT$ 的所有非奇异矩阵 $T$ 的集合，可以用以下方法而得到，就是：将与 $A$ 可换的所有非奇异矩阵的集合中的矩阵，右乘以一个任何具有性质 $B=T_0^{-1}AT_0$ 的矩阵 $T_0$ 而得到.

1053. 证明：如果矩阵 $A$ 相似于对角矩阵，则它的 $p$ 级相伴矩阵 $A_p$(见习题 969) 也相似于对角矩阵.

1054. 证明：如果两个矩阵 $A$ 和 $B$ 都相似于对角矩阵，则它们的 Kronecker 乘积 $A\times B$(见习题 963) 也是一个相似于对角矩阵的矩阵.

1055．证明：如果矩阵 $A$ 和 $B$ 相似，则它们的 $p$ 级相伴矩阵 $A_p$ 和 $B_p$(在行和列的 $n$ 个号码取 $p$ 个的各组合的任何两个排法下所得到的矩阵 $A_p$ 和 $B_p$)也是相似的.

1056．证明：如果矩阵 $A_1$ 与 $B_1$ 分别相似于矩阵 $A_2$ 与 $B_2$, 则 Kronecker 乘积 $A_1\times B_1$ 和 $A_2\times B_2$(是在指标数对的任何两个排法下而取的)也彼此相似.

1057．证明：如果 $\lambda$ 方阵 $B$ 表为形式

$$B=B_0\lambda^s+B_1\lambda^{s-1}+\cdots+B_s,$$

其中 $B_0, B_1, \cdots, B_s$ 是不依赖 $\lambda$ 的矩阵，且矩阵 $B_0$ 是非奇异的，则与 $B$ 同阶的任何 $\lambda$ 方阵 $A$, 可用 $B$ 左除或右除，即存在右商 $Q_1$ 和右剩余 $R_1$ 使得 $A=BQ_1+R_1$, 以及左商 $Q_2$ 和左剩余 $R_2$ 使得 $A=Q_2B+R_2$, 并且矩阵 $R_1$ 和 $R_2$ 的元素关于 $\lambda$ 的次数低于 $s$，又 $Q_1$, $R_1$ 和 $Q_2$, $R_2$ 都是唯一确定的.

1058．将矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda^2+3\lambda+2 & -\lambda+6\\ -3\lambda^2+7\lambda+11 & -3\lambda^2+9\lambda+1 & -2\lambda+8\\ -\lambda^2+2\lambda+8 & -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda+4\end{pmatrix}$$

左除以 $B-\lambda E$, 其中 $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

1059．将矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+6 & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda+6\\ -2\lambda^3+2\lambda^2+9\lambda+8 & \lambda^2+6\lambda+1 & 2\lambda^2+7\lambda+8\\ -\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+5 & \lambda^2+2\lambda-9 & \lambda^2+5\lambda-2\end{pmatrix}$$

右除以 $B-\lambda E$, 其中 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

1060*. 证明：如果两个数值元素（或元素取自任一域 $P$）的矩阵 $A$ 和 $B$ 相似，则它们的特征矩阵 $A-\lambda E$ 和 $B-\lambda E$ 等价.

1061*. 证明：如果两个矩阵 $A$ 和 $B$ 的特征矩阵 $A-\lambda E$ 和 $B-\lambda E$ 是等价的，则这两个矩阵本身是相似的. 还证明：如果 $B-\lambda E=P(A-\lambda E)Q$，其中 $P$ 和 $Q$ 是幺模 $\lambda$ 矩阵，又 $P_0$，$Q_0$ 是用 $B-\lambda E$ 左除 $P$，右除 $Q$ 的剩余，则 $B=P_0AQ_0$ 和 $P_0Q_0=E$，即矩阵 $Q_0$ 实现了由矩阵 $A$ 到矩阵 $B$ 的相似变换.

1062. 证明：任何方阵 $A$ 与自己的转置矩阵 $A'$ 相似.

查明以下矩阵是否彼此相似：

1063.
$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 2 & 6 & -10\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}6 & 20 & -34\\ 6 & 32 & -51\\ 4 & 20 & -32\end{pmatrix}.$$

1064.
$$A=\begin{pmatrix}6 & 6 & -15\\ 1 & 5 & -5\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}37 & -20 & -4\\ 34 & -17 & -4\\ 119 & -70 & -11\end{pmatrix}.$$

1065.
$$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & -15\\ 1 & 3 & -5\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}-13 & -70 & 119\\ -4 & -19 & 34\\ -4 & -20 & 35\end{pmatrix}.$$

1066.
$$A=\begin{pmatrix}14 & -2 & -7 & -1\\ 20 & -2 & -11 & -2\\ 19 & -3 & -9 & -1\\ -6 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4 & 10 & -19 & 4\\ 1 & 6 & -8 & 3\\ 1 & 4 & -6 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}41 & -4 & -26 & -7\\14 & -13 & -91 & 18\\40 & -4 & -25 & -8\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

利用习题 1061 所指出的方法，对下列给定的矩阵 $A$ 和 $B$ 求非奇异矩阵 $T$，使得 $B=T^{-1}AT$（所求矩阵 $T$ 不唯一确定）：

1067*. $$A=\begin{pmatrix}5 & -1\\9 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}38 & -81\\16 & -34\end{pmatrix}.$$

1068* $$A=\begin{pmatrix}17 & -6\\45 & -16\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}14 & -60\\3 & -13\end{pmatrix}.$$

1069. $$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\2 & -2 & 2\\3 & -6 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}24 & -11 & -22\\20 & -8 & -20\\12 & -6 & -10\end{pmatrix}.$$

1070* 证明：矩阵 $A$ 的特征多项式 $|A-\lambda E|$ 的系数可用这个矩阵的元素以下列方式表出：$|A-\lambda E|=(-\lambda)^n+c_1(-\lambda)^{n-1}+c_2(-\lambda)^{n-2}+\cdots+c_n$，其中 $c_k$ 是矩阵 $A$ 的 $k$ 阶的所有主子式之和（如果子式所处行的号码和列的号码相同，则称为主子式）.

1071* 求矩阵 $A'A$ 的特征值（特征多项式的根），其中 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，而 $A'$ 是 $A$ 的转置矩阵.

1072. 证明：矩阵 $A$ 的特征值的和等于矩阵的迹（即主对角线元素之和），而矩阵 $A$ 的特征值的积等于行列式 $|A|$.

1073. 证明：矩阵 $A$ 的所有特征值都不为零当且仅当矩阵 $A$ 是非奇异的.

1074* 令 $p>0$ 是 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征多项式 $|A-\lambda E|$ 的根 $\lambda_0$ 的重数，$r$ 和 $d=n-r$ 是矩阵 $A-\lambda_0 E$ 的秩和缺. 证明：成立不等式

$$1\leqslant d=n-r\leqslant p.$$

1075. 举出 $n$ 阶矩阵的例子，使得前题第一或第二个不等式变成等式，即 $d=1$ 或 $d=p$.

1076.* 证明：逆矩阵 $A^{-1}$ 的特征值等于(考虑到它们的重数)矩阵 $A$ 的特征值的倒数.

1077.* 证明：矩阵 $A^2$ 的特征值等于(考虑到它们的重数)矩阵 $A$ 的特征值的平方.

1078.* 证明：矩阵 $A^p$ 的特征值等于(考虑到它们的重数)矩阵 $A$ 的特征值的 $p$ 次方.

1079.* 令 $\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|$ 是矩阵 $A$ 的特征多项式，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A$ 的特征值，而 $f(\lambda)$ 是任一多项式. 证明：矩阵 $f(A)$ 的行列式满足等式

$$|f(A)|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)=R(f,\varphi),$$

其中 $R(f,\varphi)$ 是多项式 $f$ 和 $\varphi$ 的结式. 假如定义特征多项式为 $\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|$，则

$$|f(A)|=R(\varphi,f).$$

提醒一下，两个多项式

$$f(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)\quad 和\quad g(x)=b_0\prod_{j=1}^{s}(x-\beta_j)$$

的结式，是指数

$$R(f,g)=a_0^s b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(\alpha_i-\beta_j)=a_0^s\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i)$$

$$=(-1)^{ns}b_0^n\prod_{j=1}^{s}f(\beta_j).$$

1080.* 证明：如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $A$ 的特征值，而 $f(x)$ 是一个多项式，则 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$ 是矩阵 $f(A)$ 的特征值

1081.* 证明：如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $A$ 的特征值，而 $f(x)$

$=\frac{g(x)}{h(x)}$是对 $x=A$ 有定义的有理函数(即满足条件$|h(A)|\neq 0$ 的函数),则$|f(A)|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$,且数 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$是矩阵$f(A)$的特征值.

1082.* 证明:如果 $A$ 和 $B$ 是同阶方阵,则矩阵 $AB$ 和 $BA$的特征多项式相同.

1083.* 求循环矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

的特征值.

1084.* 求 $n$ 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值.

1085.* 具有形如以下的对角线小块(Jordan 小块)

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

的分块对角形矩阵,称为 Jordan 矩阵.与矩阵 $A$ 相似的 Jordan 矩阵$A_J$,称为矩阵 $A$ 的 Jordan 形.

利用如下定理：分块对角形矩阵的初等因子组等于它对角线小块的初等因子组的并（参看习题1033），证明：在复数域上(或在包含矩阵 $A$ 所有特征值的任何域上）任何矩阵 $A$ 有 Jordan 形，并且精确到小块的次序是唯一的.

如果给定矩阵 $A$ 的特征矩阵 $A-\lambda E$ 的不变因子 $E_i(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，试写出矩阵 $A$ 的 Jordan 形 $A_J$:

1086. $E_1(\lambda)=E_2(\lambda)=1, E_3(\lambda)=E_4(\lambda)=\lambda-1,$

$E_5(\lambda)=E_6(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2).$

1087. $E_1(\lambda)=E_2(\lambda)\quad E_3(\lambda)=1, E_4(\lambda)=\lambda+1,$

$E_5(\lambda)=(\lambda+1)^2, E_6(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-5).$

1088. $E_1(\lambda)=E_2(\lambda)=1, E_3(\lambda)=\lambda-2, E_4(\lambda)=\lambda^2-4.$

1089. 证明：对 $n$ 阶的任何 $\lambda$ 方阵 $A(\lambda)$，若其行列式是 $\lambda$ 的 $n$ 次多项式，则存在 $n$ 阶数值矩阵 $B$，使得矩阵 $A(\lambda)$ 等价于特征矩阵 $B-\lambda E$.

求下列矩阵的 Jordan 形:

1090. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$　　1091. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$

1092. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}.$　　1093. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$

1094. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$　　1095. $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$

1096. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$　　1097. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$

1098. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.　　1099. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

1100. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.　　1101. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$，其中$\alpha \neq 0$.

1102. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.　　1103. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$.

1104. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.　　1105. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

1106. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.　　1107. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1108. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

1109. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$（$n$阶矩阵）.

1110. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$（$n$阶矩阵）.

1111. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1112. $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

1113. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

1114. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1115. 在条件 $a_{12}, a_{23}, \cdots, a_{n-1,n} \neq 0$ 之下，求矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

的 Jordan 形.

1116. 证明：如果矩阵 $A$ 的特征多项式 $|A-\lambda E|$ 没有重根，则 $A$ 相似于对角形阵（把 $A$ 变为对角形阵的矩阵 $T$ 的元素，属于包含 $A$ 所有特征值的域）.

1117. 证明：给定域 $P$ 上的矩阵 $A$ 相似于对角形阵当且仅当：特征矩阵 $A-\lambda E$ 的最后一个不变因子 $E_n(\lambda)$ 没有重根且它的所有根属于域 $P$.

在有理数域、实数域、复数域中，查明下列矩阵是否相似于对角形阵：

1118. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

1119. $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$.

1120. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$.

1121. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

1122. 证明：如果 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征矩阵 $A-\lambda E$ 的最后一个不变因子 $E_n(\lambda)$ 的次数为 $n$，则矩阵 $A$ 的 Jordan 形的不同小块的所有对角线元素彼此不同.

1123. 证明：矩阵 $A$ 是幂零阵（即对某个自然数 $k$, $A^k=0$）当且仅当它的所有特征值等于零.

1124. 证明：不为零的幂零矩阵不能用相似变换化为对角形阵.

1125. 求幂等矩阵 $A$(即 $A$ 具有性质 $A^2=A$)的 Jordan 形.

1126. 证明：对合矩阵 $A$(即 $A$ 具有性质 $A^2=E$)相似于对角形阵，并求出这种对角形阵的形式.

1127. 证明：周期矩阵 $A$(即具有如下性质的矩阵 $A$：对某个自然数 $k$，$A^k=E$）相似于对角形阵，并求出这种对角形阵的形式.

1128. ($a$) 求单位矩阵的最小多项式（最小多项式的定义见习题 830）；

($b$) 求零矩阵的最小多项式.

1129. 对于怎样的矩阵，最小多项式具有形式 $\lambda-\alpha$(其中 $\alpha$ 是纯量)？

1130. 求对角线元素为数 $\alpha$ 的 $n$ 阶 Jordan 小块的最小多项式.

1131. 证明：分块对角形阵的最小多项式，等于它诸对角线小块的最小多项式的最小公倍式.

1132. 证明：矩阵 $A$ 的最小多项式等于它的特征矩阵 $A-\lambda E$ 的最后一个不变因子 $E_n(\lambda)$.

1133. 证明：矩阵 $A$ 的最小多项式的某次幂能被该矩阵的特征多项式除尽.

求下列矩阵的最小多项式：

1134. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.　　1135. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

1136. 证明：为使两矩阵相似，必要的条件(但不是充分的)是：它们有相同的特征多项式和相同的最小多项式．举出两个不相似的矩阵，但它们有相同的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 和相同的最小多项式 $\psi(\lambda)$.

1137. 求$n$阶 Jordan 小块

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

的$k$次幂$A^k$.

1138* 令$A$是主对角线元素为数$\alpha$的$n$阶 Jordan 小块

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}.$$

证明：多项式$f(x)$在$x=A$的值由以下公式决定：

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \frac{f'''(\alpha)}{3!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

1139. 利用矩阵$A$的 Jordan 形，解习题 1080.

1140. 求主对角线元素为数$\alpha\neq0$的 Jordan 小块的平方的 Jordan 形.

1141* 求主对角线元素为零的 Jordan 小块（幂零 Jordan 小块）的平方的 Jordan 形.

1142. 令$X_j$是矩阵$X$的 Jordan 形．证明：

$$(A+\alpha E)_j=A_j+\alpha E,$$

其中$A$是任何方阵，而$\alpha$是数.

1143* 求$n\geqslant3$阶的矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

的 Jordan 形.

1144.* 证明：任何方阵可以表为两个对称矩阵之积的形式，其中之一是非奇异的.

1145.* 已知矩阵 $A$ 的特征值，求 $A$ 的 $p$ 级相伴矩阵 $A_p$(定义见习题 969 )的特征值.

1146.* 已知 $p$ 阶方阵 $A$ 的特征值和 $q$ 阶方阵 $B$ 的特征值，求它们的 Kronecker 乘积 $A\times B$(定义见习题 963)的特征值.

1147.* 令 $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ 是矩阵 $A$ 的最小多项式，其次数是 $r=r_1+r_2+\cdots+r_s$. 其中 $r_k$ 是 $\lambda_k$ 作为最小多项式 $\psi(\lambda)$ 的根的重数.

如果对函数 $f(\lambda)$ 而言，下列数存在：

$$f(\lambda_k),\ f'(\lambda_k),\ f''(\lambda_k),\ \cdots,\ f^{(r_k-1)}(\lambda_k)\quad (k=1,2,\cdots,s), \tag{1}$$

则称函数 $f(\lambda)$ 在矩阵 $A$ 的谱上有定义，并称数组(1)为函数 $f(\lambda)$ 在 $A$ 的谱上的值组. 证明：多项式 $g(\lambda)$ 和 $h(\lambda)$ 在矩阵 $A$ 的值相等，即 $g(A)=h(A)$ 当且仅当这两个多项式在 $A$ 的谱上的值相等.

1148. 令函数 $f(\lambda)$ 在矩阵的谱上有定义(在前题意义下). 证明：如果至少存在一个多项式使得其在矩阵 $A$ 的谱上的值与 $f(\lambda)$ 的值相等，则这种多项式就有无穷多个，并且它们中有一个且只有一个其次数小于矩阵 $A$ 的最小多项式的次数. 这个多项式 $r(\lambda)$ 称为函数 $f(x)$ 在矩阵 $A$ 的谱上的 Lagrange-Sylvester 插值多项式. 它在矩阵 $A$ 的值就定义为 $f(\lambda)$ 在矩阵 $A$ 的值：$f(A)=r(A)$.

1149. 证明：如果 $f(\lambda)$ 在矩阵 $A$ 的谱上有定义，且特征多项

式$|A-\lambda E|$没有重根，则 Lagrange-Sylvester 插值多项式 $r(\lambda)$ 存在，从而矩阵 $f(A)$有意义．求 $r(\lambda)$ 和 $f(A)$的形式．

1150．证明：如果函数 $f(\lambda)$在矩阵$A$的谱上有定义，并且这个矩阵的最小多项式 $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$没有重根，则Lagrange-Sylvester 插值多项式 $r(\lambda)$ 存在且矩阵 $f(A)$ 有意义．求出计算 $f(A)$的表达式．

1151.* 证明：如果函数 $f(\lambda)$在矩阵$A$的谱上有定义，则矩阵 $f(A)$的定义（见习题 1148）有意义，即存在 Lagrange-Sylvester 插值多项式 $r(\lambda)$．令$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$是矩阵$A$的最小多项式，其中根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 彼此不同，又令

$$\psi_k(\lambda)=\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{r_k}}\qquad (k=1,2,\cdots,s).$$

证明：

$$r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}[\alpha_{k,1}+\alpha_{k,2}(\lambda-\lambda_k)+\cdots+\alpha_{k,r_k}(\lambda-\lambda_k)^{r_k-1}]\cdot\psi_k(\lambda),\quad (1)$$

其中数 $\alpha_{k,j}$ 由以下等式决定：

$$\alpha_{k,j}=\frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(j-1)}_{\lambda=\lambda_k}\quad (j=1,2,\cdots,r_k;\ k=1,2,\cdots,s).\quad (2)$$

即等式(1)中方括号表达式等于函数$\dfrac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}$按差$\lambda-\lambda_k$的幂的Taylor 级数展开式的前 $r_k$ 项之和．

1152．令 $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^3\quad(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 是矩阵$A$的最小多项式，$f(\lambda)$是在这矩阵谱上有定义的函数．利用前题，写出矩阵$f(A)$的表达式．

1153．证明：如果矩阵$A$和$B$是相似的，并且 $B=T^{-1}AT$，又对函数 $f(\lambda)$而言矩阵 $f(A)$ 存在，则矩阵 $f(B)$ 也存在且相似于

$f(A)$，并有 $f(B)=T^{-1}f(A)T$（其中矩阵 $T$ 与上面相同）。

1154* 证明：如果矩阵 $A$ 是分块对角形阵：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix},$$

又函数 $f(\lambda)$ 在矩阵 $A$ 的谱上有定义，则

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & & & 0 \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(A_s) \end{pmatrix}.$$

1155. 求函数 $f(\lambda)$ 在矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的 Lagrange-Sylvester 插值多项式 $r(\lambda)$ 以及函数 $f(\lambda)$ 在 $A$ 的值 $f(A)$。

对于怎样的函数 $f(\lambda)$，值 $f(A)$ 有意义？

1156. 对矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

解与前题类似的问题。

1157. 证明：如果矩阵 $A$ 相似于对角形阵：

$$A=T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}T,$$

又对函数 $f(\lambda)$ 矩阵 $f(A)$ 存在，则 $f(A)$ 也相似于对角形阵，并且有

$$f(A)=T^{-1}\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & & 0\\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}T,$$

其中矩阵 $T$ 与前面相同.

1158. 证明：如果 $f(\lambda)=g(\lambda)+h(\lambda)$ 且矩阵 $g(A)$ 和 $h(A)$ 存在，则矩阵 $f(A)$ 也存在且 $f(A)=g(A)+h(A)$.

1159. 证明：如果 $f(\lambda)=g(\lambda)h(\lambda)$ 且矩阵 $g(A)$ 和 $h(A)$ 存在，则矩阵 $f(A)$ 也存在且 $f(A)=g(A)h(A)$.

**1160*** 证明：函数 $f(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ 对所有非奇异矩阵 $A$ 且仅对它们有定义，并且 $f(A)=A^{-1}$.

1161. 证明：如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $A$ 的特征值，又函数 $f(\lambda)$ 对 $\lambda=A$ 有意义，则 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$ 是矩阵 $f(A)$ 的特征值.

利用 Lagrange-Sylvester 插值多项式和习题 1148 到 1152，或者求出把给定矩阵变为它的 Jordan 形的相似变换矩阵并应用习题 1154, 1156, 1153，计算矩阵函数的下列值：

1162. $A^{100}$，其中 $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$.

**1163.** $A^{50}$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

1164. $\sqrt{A}$，其中 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

1165. $\sqrt{A}$，其中 $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1166. $e^A$，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

1167. $e^A$，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1168. $e^A$，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

1169. $\ln A$，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

1170. $\sin A$，其中 $A=\begin{pmatrix} \pi-1 & 1 \\ -1 & \pi+1 \end{pmatrix}$.

1171* 证明：方程 $\sin 2A=2\sin A\cos A$ 对任何方阵 $A$ 成立.

1172* 证明：对任何方阵 $A$，矩阵 $e^A$ 存在而且是非奇异的.

1173. 求矩阵 $e^A$ 的行列式，其中 $A$ 是 $n$ 阶方阵.

1174* 令函数 $f(\lambda)$ 当 $\lambda=A$ 时有意义. 证明：矩阵 $f(A)$ 的行列式满足等式 $|f(A)|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $A$ 的特征值（考虑到它们的重数）.

## §15. 二 次 型[①]

本节除二次型习题之外，还安排了与二次型理论有关的对称矩阵和正交矩阵的性质的习题. 这里采用下列术语：所谓**线性变换**是指关于未知量的下列形式的变换：

---

① 涉及双线性函数和二次函数的习题在 §24 给出.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \cdots + q_{1n}y_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \cdots + q_{nn}y_n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

由变换(1)的系数在相应次序下所组成的矩阵

$$
Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}
\tag{2}
$$

称为这个变换的矩阵. 线性变换称为**非奇异的**, 如果它的矩阵是非奇异的.

两个二次型称为**等价的**, 如果用一个非奇异线性变换可将其中的一个化为其中的另一个.

与给定二次型等价的、且不包含未知量乘积项的二次型称为给定二次型的**典则形式**. 而所谓给定二次型的**标准形式**, 则是那样一种典则形式: 其中未知量平方项的系数(除零之外)在实域时等于$\pm 1$, 在复域时等于$+1$.

在实域中求下列二次型的标准形式:

1175. $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

1176. $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$.

1177. $x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$.

1178. $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$.

1179. $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4$

$$+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4.$$

对下列二次型求标准形式和化到这标准形式的非奇异线性变换(由于所求线性变换的非唯一性, 答案可不同于书后答案):

1180. $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

1181. $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.

1182. $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

1183. $2x_1^2+18x_2^2+8x_3^2-12x_1x_2+8x_1x_3-27x_2x_3$.

1184. $-12x_1^2-3x_2^2-12x_3^2+12x_1x_2-24x_1x_3-8x_2x_3$.

1185. $x_1x_2-x_2x_3+x_3x_4+x_1x_4$.

1186. $3x_1^2+2x_2^2-x_3^2-2x_4^2+2x_1x_2-4x_2x_3+2x_2x_4$.

用有理系数的非奇异线性变换把下列二次型化为整系数的典则形式，并求出用旧未知量表示新未知量的表达式：

1187. $2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3-3x_2x_3$.

1188. $3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.

1189. $\frac{1}{2}x_1^2+2x_2^2+3x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4$.

对下列二次型，求把二次型 $f$ 化为二次型 $g$ 的非奇异线性变换(所求变换不唯一确定)：

1190. $f=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$;

$g=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3$.

1191. $f=3x_1^2+10x_2^2+25x_3^2-12x_1x_2-18x_1x_3+40x_2x_3$;

$g=5y_1^2+6y_2^2+12y_1y_2$.

1192. $f=5x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3$;

$g=4y_1^2+y_2^2+9y_3^2-12y_1y_3$.

把下列二次型化为典则形式，并求用旧未知量表达新未知量的表达式(答案不唯一)：

1193. $\sum_{i,j=1}^{n} a_ia_jx_ix_j$，其中数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零.

1194. $\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i<j}^{n}x_ix_j$. 1195* $\sum_{i<j}^{n}x_ix_j$. 1196. $\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

1197* $\sum_{i=1}^{n}(x_i-s)^2$，其中 $s=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

1198.* $\sum_{i<j}^{n}|i-j|\cdot x_i x_j$.

1199.* 令给定二次型

$$f=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2,$$

其中 $l_1, l_2, \cdots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \cdots, l_{p+q}$ 是$x_1, x_2, \cdots, x_n$的实线性型. 证明: 型$f$的正惯性指标（即典则形式中正系数的个数）不超过$p$,而负惯性指标不超过$q$.

1200.* 证明: 如果用某些线性变换(不一定是非奇异的)可把两个型$f$, $g$中的每一个化为另一个,则这两个型是等价的.

查明下列型中的哪些在实数域中是等价的:

1201. $f_1=x_1^2-x_2x_3$; $f_2=y_1y_2-y_3^2$; $f_3=z_1z_2+z_3^2$.

1202. $f_1=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3$;

$f_2=y_1^2+2y_2^2-y_3^2+4y_1y_2-2y_1y_3-4y_2y_3$;

$f_3=-4z_1^2-z_2^2-z_3^2-4z_1z_2+4z_1z_3+18z_2z_3$.

1203. 证明: $n$个未知量的所有二次型可以进行分类,使得两个二次型当且仅当它们属于同一类时才是等价的. 在复域和实域中求这些类的数目.

1204. 对于那些使型$f$与型$-f$ 等价的实等价二次型类, 其秩和符号差的特征是什么?

1205. 在实数域中$n$个未知量的二次型, 有指定符号差 $s$ 的等价类的数目等于多少?

1206. 证明: 为使二次型能分解为两个线性型之积, 必要且充分的是以下条件成立: (a)在实数域: 秩不超过 2, 而当秩等于2时符号差等于零; (b)在复数域: 秩不超过 2.

1207. 证明: 二次型是正定的当且仅当它的矩阵可以表为形式$A=C'C$, 其中$C$是非奇异实矩阵, $C'$是$C$的转置矩阵.

1208. 利用习题 913, 951 和 1207 证明: 二次型是正定的当

且仅当它的所有角子式是正的．二次型的角子式，指的是它的矩阵中位于前 $k$ 行前 $k$ 列的子式（$k=1, 2, \cdots, n$；$n$ 是矩阵的阶）．

1209．证明：在正定二次型中所有未知量平方的系数是正的，但这个条件不是型为正定的充分条件．

1210．证明下列论断：

($a$) 二次型 $f$ 是正定的必要且充分的条件是它的矩阵的所有主子式(而不仅仅是角子式——参看习题 1208)是正的．

($b$) 二次型 $f$ 是非负的(即对未知量的任何实值，$f \geqslant 0$)必要且充分的条件是它的矩阵的所有主子式是非负的．举例说明（与正定型不同）：为使 $f$ 非负，所有角子式非负不是充分的．

($c$) 为使实对称矩阵 $A$ 表为形式 $A=C'C$，其中 $C$ 是非奇异实矩阵，必要且充分的条件是 $A$ 的所有角子式是正的．

($d$) 为使实对称矩阵 $A$ 表为形式 $A=C'C$，其中 $C$ 是实方阵，必要且充分的条件是 $A$ 的所有主子式是非负的．此外，如果 $A$ 的秩等于 $r$，则 $C$ 的秩也等于 $r$，并可以认为 $C$ 的前 $r$ 行是线性无关的，而其余各行是零．

1211．证明：二次型 $f$ 是负定的（即对未知量的任何不全为零的实值，$f<0$）当且仅当角子式 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 的符号交错，并且 $D_1<0$．其中 $D_k$ 是 $k$ 阶角子式($k=1, 2, \cdots, n$)．

求使得下列二次型为正定的参数 $\lambda$ 的所有值：

1212．$5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$．

1213．$2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$．

1214．$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$．

1215．$x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$．

1216．$2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$．

1217.* 二次型 $f$ 的矩阵的行列式 $D_f$，称为该二次型的**判别式**．证明：如果把未知量 $x_1, \cdots, x_n$ 的非零线性型的平方加于正

定二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则型的判别式增加.

1218.* 令 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 是正定二次型，又令 $\varphi(x_2, x_3, \cdots, x_n)=f(0, x_2, \cdots, x_n)$. 证明：对这两个型的判别式成立不等式 $D_f \leqslant a_{11}D_\varphi$.

1219.* 证明：如果非负二次型即使在未知量的一个非零实值组变为零，则这型是奇异的(即它的判别式等于零).

1220.* 二次型 $(f, g)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_ix_j$ 称为两个二次型

$$f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \text{ 和 } g=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$$

的合成. 证明：

(a) 如果型 $f$ 和 $g$ 是非负的，则型 $(f, g)$ 也是非负的；

(b) 如果型 $f$ 和 $g$ 是正定的，则型 $(f, g)$ 也是正定的.

1221.* 线性变换

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n, \\
y_2 &= x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= x_n
\end{aligned}$$

称为三角形变换. 证明：

(a) 三角形变换是非奇异变换，且三角形变换的逆变换也是三角形变换；

(b) 二次型 $f=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 的角子式 $D_k(k=1, 2, \cdots, n)$ (参看习题 1208)在三角形变换下不变.

1222.* 证明：

(a) 为使秩为 $r$ 的二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 用三角形变换可以化为型

$$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ry_r^2, \tag{1}$$

其中 $\lambda_k\neq0(k=1,2,\cdots,r)$，必要且充分的条件是：

$$D_k\neq0\quad(k\leqslant r),\quad D_k=0\quad(k>r), \tag{2}$$

其中

$$D_k=\begin{vmatrix}a_{11}\cdots a_{1k}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{k1}\cdots a_{kk}\end{vmatrix}\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

是型 $f$ 的角子式(参看习题1208)。

(b) 所指出的典则形式(1)是唯一确定的，并且它的系数可按公式

$$\lambda_k=\frac{D_k}{D_{k-1}}\qquad(k=1,2,\cdots,r;\ D_0=1) \tag{3}$$

求得(Sylvester 定理)。

1223. 令秩为 $r$ 的二次型 $f$ 的角子式满足前题条件 (2)。证明：这型的正惯性指标等于数列

$$1=D_0, D_1, D_2, \cdots, D_r$$

中的保号数，而负惯性指标等于其中的变号数。

查明：在下列二次型偶中，有一个型是正定的；求把这个型化为标准形式、并把偶中另一个型化为典则形式的非奇异线性变换；然后写出这个典则形式(线性变换不唯一确定)：

1224. $f=-4x_1x_2$,

$g=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2$.

1225. $f=x_1^2+26x_2^2+10x_1x_2$,

$g=x_1^2+56x_2^2+16x_1x_2$.

1226. $f=8x_1^2-28x_2^2+14x_3^2+16x_1x_2+14x_1x_3+32x_2x_3$,

$$g=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3.$$

1227. $f=2x_4^2+x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3+2x_2x_4,$

$$g=\frac{1}{4}x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_4^2+2x_2x_4.$$

1228. $f=x_1^2+\frac{3}{2}x_2^2-2x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3,$

$$g=x_1^2+\frac{5}{4}x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_2x_3.$$

1229. $f=x_1^2-15x_2^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3,$

$$g=x_1^2+17x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-14x_2x_3.$$

1230.* 令给定同一些未知量的型偶 $f, g$, 并且 $g>0$. 证明: 在任何把型 $g$ 化为标准形式(即化为平方和)的线性变换下所得到的型 $f$ 的典则形式

$$f=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

精确到加项的次序是唯一确定的, 并且它的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是所谓型偶 $f, g$ 的 $\lambda$ 方程(即方程 $|A-\lambda B|=0$)的根, 其中 $A$ 和 $B$ 分别是型 $f$ 和 $g$ 的矩阵.

用一个非奇异实线性变换是否可将下列二次型偶化为典则形式:

1231. $f=x_1^2+4x_1x_2-x_2^2,$

$$g=x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2.$$

1232. $f=x_1^2+x_1x_2-x_2^2,$

$$g=x_1^2-2x_1x_2.$$

1233. 令给定两个正定型 $f$ 和 $g$, 又令未知量的第一个非奇异线性变换把型 $f$ 化为型 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$, 同时把型 $g$ 化为标准形式, 而第二个变换把型 $f$ 化为标准形式、同时把型 $g$ 化为型 $\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i z_i^2$. 求

出系数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$和$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$之间的联系.

不找出线性变换，求在把型 $g>0$ 化为标准形式的那个变换下，型 $f$ 所化成的典则形式:

1234. $f=21x_1^2-18x_2^2-6x_3^2+4x_1x_2+28x_1x_3+6x_2x_3$,

$g=11x_1^2+6x_2^2+6x_3^2-12x_1x_2+12x_1x_3-6x_2x_3$.

1235. $f=14x_1^2-4x_2^2+17x_3^2+8x_1x_2-40x_1x_3-26x_2x_3$,

$g=9x_1^2+6x_2^2+6x_3^2+12x_1x_2-10x_1x_3-2x_2x_3$.

1236. 证明:两个型偶$f_1$、$g_1$和$f_2$、$g_2$(其中$g_1$和$g_2$是正定的)是等价的(即存在一个非奇异线性变换把$f_1$化为$f_2$、同时把$g_1$化为$g_2$)当且仅当它们的$\lambda$方程$|A_1-\lambda B_1|=0$和$|A_2-\lambda B_2|=0$的根完全相等.

不找出把一个型偶化为另一个型偶的线性变换，查明下列型偶是否等价:

1237. $f_1=2x_1^2+3x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$,

$g_1=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$,

$f_2=2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$,

$g_2=x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3$.

1238. $f_1=4x_1^2+6x_2^2+21x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-22x_2x_3$,

$g_1=4x_1^2+3x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-6x_2x_3$,

$f_2=9x_1^2+6x_2^2+6x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3+12x_2x_3$,

$g_2=9x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3+2x_2x_3$.

求把二次型偶 $f_1, g_1$ 化为另一型偶 $f_2, g_2$ 的非奇异线性变换(不唯一确定):

1239. $f_1=2x_1^2-7x_2^2+2x_1x_2$, $f_2=-7y_1^2-3y_2^2-12y_1y_2$,

$g_1=2x_1^2+13x_2^2+10x_1x_2$, $g_2=13y_1^2+25y_2^2+36y_1y_2$.

1240. $f_1=3x_1^2+2x_2^2+10x_1x_2$, $f_2=-9y_1^2-20y_2^2-44y_1y_2$,

$g_1 = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2$, $g_2 = 29y_1^2 + 4y_2^2 + 20y_1y_2$.

1241. 令 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是两个二次型，其中至少有一个是正定的. 证明：$n$ 维空间中的“曲面”$f=1$ 和 $g=1$ 不相交(即没有公共点)当且仅当型 $f-g$ 是有定的.

1242.* 证明：在正交变换下，二次型 $f$ 所化成的典则形式 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$ 是唯一确定的，并且它的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是型 $f$ 的矩阵 $A$ 的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 的根.

求在正交变换下下列二次型所化成的典则形式（不找出这变换本身）：

1243. $3x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1244. $7x_1^2 - 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1245. $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1246. $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1247.* $\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}$.

求把下列二次型化为典则形式（化到主轴）的那个正交变换（不唯一确定），并写出这个典则形式：

1248. $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

1249. $11x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

1250. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1251. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1252. $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

1253. $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1254. $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.

1255. $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

1256. $5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_3$

$$+6x_1x_4+6x_2x_3-2x_2x_4-10x_3x_4.$$

1257. $3x_1^2+8x_1x_2-3x_2^2+4x_3^2-4x_3x_4+x_4^2$.

1258. $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_3^2-4x_3x_4-2x_4^2$.

1259. $9x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+8x_4^2+8x_2x_3-4x_2x_4+4x_3x_4$.

1260. $4x_1^2-4x_1x_2-x_2^2+5x_3^2-4x_4^2+12x_4x_5+x_5^2$.

1261. $4x_1^2-4x_2^2-8x_2x_3+2x_3^2-5x_4^2+6x_4x_5+3x_5^2$.

1262. $3x_1^2+8x_1x_2-3x_2^2+4x_3^2-6x_3x_4-4x_4^2$
$$+4x_5^2+4x_5x_6+x_6^2.$$

求在正交变换下，下列二次型所化到的典则形式，并用旧未知量表示新未知量(所求变换不唯一)：

1263. $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i<j}^{n}x_ix_j$.

1264. $\sum\limits_{i<j}^{n}x_ix_j$.

1265.* 称两个二次型是**正交等价的**，如果用正交变换可以把其中之一化为另一个. 证明：两个二次型正交等价必要且充分的条件是它们的矩阵的特征多项式相同.

查明下列二次型中哪些是正交等价的：

1266. $f=9x_2^2+9x_3^2+12x_1x_2+12x_1x_3-6x_2x_3$;

$g=-3y_1^2+6y_2^2+6y_3^2+12y_1y_2+12y_1y_3+6y_2y_3$;

$h=11z_1^2-4z_2^2-11z_3^2+8z_1z_2-2z_1z_3-8z_2z_3$.

1267. $f=7x_1^2+x_2^2-x_3^2+8x_1x_2-8x_1x_3-16x_2x_3$;

$g=\frac{2}{3}y_1^2-\frac{1}{3}y_2^2-\frac{1}{3}y_3^2+\frac{4}{3}y_1y_2+\frac{4}{3}y_1y_3+\frac{8}{3}y_2y_3$;

$h=z_2^2-z_3^2+2\sqrt{2}z_1z_3$.

1268. 证明：任何实对称矩阵 $A$，可以表为形式 $A=Q^{-1}BQ$，其中 $Q$ 是正交矩阵，而 $B$ 是实对角形矩阵.

对下列矩阵，求正交矩阵 $Q$ 和对角形矩阵 $B$，使得给定的矩阵可表为 $Q^{-1}BQ$：

1269. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.  1270. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1271.* 证明：实对称矩阵 $A$ 的所有特征值位于区间 $[a, b]$ 上当且仅当：具有矩阵 $A-\lambda_0 E$ 的二次型对任何 $\lambda_0 < a$ 是正定的，而对任何 $\lambda_0 > b$ 是负定的.

1272.* 令 $A$ 和 $B$ 是实对称矩阵. 证明：如果矩阵 $A$ 的特征值位于区间 $[a, b]$ 上，而矩阵 $B$ 的特征值位于区间 $[c, d]$ 上，则矩阵 $A+B$ 的特征值位于区间 $[a+c, b+d]$ 上.

1273. 证明：非奇异二次型可以用正交变换化为标准形式当且仅当它的矩阵是正交阵.

1274. 证明：正定二次型的矩阵是正交阵当且仅当这个型是平方(项)之和. 用矩阵的语言去叙述这一事实.

1275.* 证明：任何非奇异实矩阵 $A$ 可以表为形式 $A=QB$，其中 $Q$ 是正交矩阵，而 $B$ 是主对角线上有正元素的三角形矩阵

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

并且这种表示法是唯一的.

1276.* 证明：

(a) 任何非奇异实矩阵 $A$，可以表为 $A=Q_1B_1$，也可以表为 $A=B_2Q_2$，其中矩阵 $Q_1$ 和 $Q_2$ 是实正交阵，而矩阵 $B_1$ 和 $B_2$ 是实对称阵且具有正的角子式. 这两种表示的每一种都是唯一的；

(*b*) 任何非奇异复矩阵 $A$，可以表为 $A=Q_1B_1$，也可表为 $A=B_2Q_2$，其中矩阵 $Q_1$ 和 $Q_2$ 是酉矩阵，而矩阵 $B_1$ 和 $B_2$ 是 Hermite 矩阵且具有正的角子式（矩阵 $B$ 称为 Hermite 阵，如果 $\bar{B}'=B$）. 每种表示都是唯一的.

(*c*) 令 $A$ 是对称矩阵(或 Hermite 阵)且具有正的角子式，又令 $B$ 是正交矩阵(对应地，酉矩阵). 试证明:

(1) 乘积 $AB$ 和 $BA$ 是对称矩阵(或 Hermite 矩阵)且具有正角子式当且仅当 $B$ 是单位矩阵;

(2) 乘积 $AB$ 和 $BA$ 是正交矩阵(或酉矩阵)当且仅当 $A$ 是单位矩阵.

# 第四章　向量空间及其线性变换

## § 16. 仿射向量空间

下面使用下列记号：向量用粗体小写拉丁字母表示，而向量空间、它们的子空间和线性流形用粗体的大写拉丁字母表示，向量的坐标用平常体写为一行放在圆括号内，例如：$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。在矩阵记法时，基底向量写为圆括号中的一行，而向量的坐标写为圆括号中的一列。

矩阵 $T=(t_{ij})_1^n$ 称为由旧基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 到新基底 $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n$ 的**转移矩阵**，其各列是新基底向量在旧基底下的坐标。所以，旧基底和新基底之间由下面的矩阵等式联系着：

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \cdots, \mathbf{e}'_n)=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)\cdot T. \tag{1}$$

在这种记法下，向量 $\mathbf{x}$ 在旧基底下的坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与在新基底下的坐标 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ 由等式 $x_i=\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j$ 联系着，或者用矩阵记号写为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

向量空间 $\mathbf{R}$ 的非空向量集 $\mathbf{L}$（亦即至少包含一个向量），如果具有下列性质，则称为 $\mathbf{R}$ 的**线性子空间**：

(1) $\mathbf{L}$ 中任两个向量的和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 也属于 $\mathbf{L}$；

(2) $\mathbf{L}$ 中任一向量 $\mathbf{x}$ 与任一数 $\alpha$ 的积 $\alpha\mathbf{x}$ 也属于 $\mathbf{L}$。

把同一个向量 $\mathbf{x}_0$ 加到向量空间 $\mathbf{R}$ 的某一子空间 $\mathbf{L}$ 的所有向

量上，所得到的 $\boldsymbol{R}$ 中的向量集 $\boldsymbol{P}$，称为 $\boldsymbol{R}$ 的**线性流形**. $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的这种关系记为: $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{x}_0$ 或者 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{x}_0$. 我们将说: 线性流形 $\boldsymbol{P}$ 是从线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 平行移动一个向量 $\boldsymbol{x}_0$ 所得到的. $\boldsymbol{L}$ 的维数称作 $\boldsymbol{P}$ 的维数. 这种定义的合理性可由习题 1331 的断言推出.

一维线性流形称作直线，二维线性流形称作平面.

向量空间 $\boldsymbol{R}$ 的两个线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 与 $\boldsymbol{L}_2$ 的**和**是指 $\boldsymbol{R}$ 中所有表为形式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$，其中 $\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}_2$ 的向量的集 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2$. 此处 $a\in A$ 表示元素 $a$ 属于集合 $A$. 向量空间 $\boldsymbol{R}$ 两个线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的交，是指 $\boldsymbol{R}$ 中既属于 $\boldsymbol{L}_1$ 又属于 $\boldsymbol{L}_2$ 的所有向量的集 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{L}_1\cap\boldsymbol{L}_2$.

向量空间 $\boldsymbol{R}$ 的两个线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 当它们的交只由零向量组成时，亦即 $\boldsymbol{L}_1\cap\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{0}$ 时，这两个子空间的和称为向量空间 $\boldsymbol{R}$ 的两个线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的**直接和**. 在直接和的情形写为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{L}_1\dot{+}\boldsymbol{L}_2$.

$n$ 维向量空间将用 $\boldsymbol{R}_n$ 表示. 同时，如果不预先声明，总是取实数域作为基域，亦即 $\boldsymbol{R}_n$ 由具有任意实坐标的所有 $n$ 维向量组成.

向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{x}$ 用在某基底下的坐标给出. 证明: 向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 本身组成一个基底，并求向量 $\boldsymbol{x}$ 在这基底下的坐标:

1277. $\boldsymbol{e}_1=(1,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{e}_2=(1,\ 1,\ 2)$，$\boldsymbol{e}_3=(1,\ 2,\ 3)$; $\boldsymbol{x}=(6,9,14)$.

1278. $\boldsymbol{e}_1=(2,1,\ -3)$，$\boldsymbol{e}_2=(3,\ 2,\ -5)$，$\boldsymbol{e}_3=(1,\ -1,\ 1)$，$\boldsymbol{x}=(6,2,\ -7)$.

1279. $\boldsymbol{e}_1=(1,2,-1,-2)$，$\boldsymbol{e}_2=(2,3,0,-1)$，$\boldsymbol{e}_3=(1,2,1,4)$，$\boldsymbol{e}_4=(1,3,-1,0)$; $\boldsymbol{x}=(7,14,-1,2)$.

证明: 下列两组向量的每一组都是基底，并求同一个向量在这

两组基底下的坐标之间的联系：

1280. $e_1=(1,2,1)$, $e_2=(2,3,3)$, $e_3=(3,7,1)$; $e'_1=(3,1,4)$, $e'_2=(5,2,1)$, $e'_3=(1,1,-6)$.

1281. $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,1)$, $e_3=(1,1,2,1)$, $e_4=(1,3,2,3)$; $e'_1=(1,0,3,3)$, $e'_2=(-2,-3,-5,-4)$, $e'_3=(2,2,5,4)$, $e'_4=(-2,-3,-4,-4)$.

1282. 证明：

(a) $1, x, x^2, \cdots, x^n$;

(b) $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \cdots, (x-\alpha)^n$

分别组成基底，并求多项

式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 在这些基底下的坐标.

1283. 在次数小于或等于 $n$ 的多项式空间中，求由基底 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 到基底 $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \cdots, (x-\alpha)^n$ 的转移矩阵.

1284. 由一个基底到另一个基底的转移矩阵如何变化，如果

(a) 交换第一个基底两个向量的位置？

(b) 交换第二个基底两个向量的位置？

(c) 在相反的次序下写出两组基底的向量？

下列向量集的每一个集是否为相应向量空间的线性子空间（从 1285 题到 1293 题）：

1285. $n$ 维向量空间中，坐标是整数的所有向量.

1286. 平面上，位于坐标轴 $Ox$ 和 $Oy$ 之一上的所有向量.

1287. 平面上，终点位于给定直线上的所有向量（如果不另作说明，任一向量的起点，假定与坐标原点重合）.

1288. 平面上，起点和终点位于一给定直线上的所有向量.

1289. 三维空间中，终点不位于一给定直线上的所有向量.

1290. 平面上，终点位于第一象限的所有向量.

1291. $\boldsymbol{R}_n$ 中坐标满足方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的所有向量.

1292. $R_n$ 中坐标满足方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的所有向量.

1293. 是 $R_n$ 中给定向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 的线性组合的所有向量.

1294. 列举三维向量空间的所有线性子空间.

1295. 令线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 包含于线性子空间 $\boldsymbol{L}_2$ 中. 证明: $\boldsymbol{L}_1$ 的维数不高于 $\boldsymbol{L}_2$ 的维数, 并且二者维数相等当且仅当 $\boldsymbol{L}_1=\boldsymbol{L}_2$. 后一断言对给定空间的任二线性子空间是否为真?

1296. 证明: 如果 $n$ 维空间的两个线性子空间的维数之和大于 $n$, 则这两个子空间有公共的非零向量.

证明下列向量集合组成线性子空间, 并求其基底和维数(1297—1300):

1297. 第一个和最后一个坐标相等的所有 $n$ 维向量.

1298. 偶数号码坐标等于零的所有 $n$ 维向量.

1299. 偶数号码的坐标相等的所有 $n$ 维向量.

1300. 形如$(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \cdots)$的所有 $n$ 维向量, 其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是任何数.

1301. 证明: 如果取矩阵的加法以及矩阵与数的乘法作为运算, 则实元素(或任何域 $P$ 中的元素)的所有 $n$ 阶方阵组成实数域(或域 $P$)上的向量空间. 求这空间的基底和维数.

1302. 证明: 如果取多项式的通常加法以及多项式与数的乘法作运算, 则所有一个未知量的、实系数的(或以任何域 $P$ 中的元素为系数)、次数$\leqslant n$ 的多项式组成向量空间. 求这空间的基底和维数.

1303. 证明: 所有对称矩阵组成所有 $n$ 阶方阵空间的一个线性子空间. 求这子空间的基底和维数.

1304. 证明: 所有斜对称矩阵组成所有 $n$ 阶方阵空间的线性子空间. 求它的基底和维数.

1305. 证明：如果次数$\leqslant n$的多项式空间的线性子空间$\boldsymbol{L}$至少包含一个$k$次多项式，$k=0,1,2,\cdots,p$，但不包含次数$k>p$的多项式，则$\boldsymbol{L}$与$\boldsymbol{L}_p$重合，其中$\boldsymbol{L}_p$是所有次数$\leqslant p$的多项式子空间.

1306. 令$f$是$n$个未知量的秩为$r$的非负二次型. 证明：方程$f=0$的所有解组成空间$\boldsymbol{R}_n$的$n-r$维线性子空间.

1307. 证明：$n$个未知量的秩为$r$的任何齐次线性方程组的解组成$n$维空间$\boldsymbol{R}_n$的线性子空间，其维数为$d=n-r$. 反之，对$n$维空间$\boldsymbol{R}_n$的任一$d$维的线性子空间$\boldsymbol{L}$，存在$n$个未知量的秩为$r=n-d$的齐次线性方程组，它的解恰好充满给定子空间$\boldsymbol{L}$.

1308. 求空间$\boldsymbol{R}_n$的线性子空间$\boldsymbol{L}$的某一个基底和$\boldsymbol{L}$的维数，其中$\boldsymbol{L}$是由方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$所给出的子空间.

1309. 证明：由向量$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$所张成的线性子空间（亦即这些向量的所有线性组合的子空间）$\boldsymbol{L}$的维数，等于这些向量在某一基底下的坐标所组成的矩阵的秩，而做为子空间$\boldsymbol{L}$的基底可以取这一向量组的任何极大线性无关子组.

求由下列向量组所张成的线性子空间的维数和基底：

1310. $\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,-1)$，$\boldsymbol{a}_2=(2,1,1,0)$，$\boldsymbol{a}_3=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{a}_4=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{a}_5=(0,1,2,3)$.

1311. $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1,0)$，$\boldsymbol{a}_2=(1,1,-1,-1,-1)$，$\boldsymbol{a}_3=(2,2,0,0,-1)$，$\boldsymbol{a}_4=(1,1,5,5,2)$，$\boldsymbol{a}_5=(1,-1,-1,0,0)$.

求线性方程组，使得它给出由下列向量组所张成的线性子空间(1312—1316)：

1312. $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,0)$，$\boldsymbol{a}_2=(1,1,0,1)$，$\boldsymbol{a}_3=(2,0,1,1)$.

1313. $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,-1,1)$，$\boldsymbol{a}_2=(1,1,0,0,3)$，$\boldsymbol{a}_3=(3,1,1,-1,7)$，$\boldsymbol{a}_4=(0,2,-1,1,2)$.

1314. 证明：空间$\boldsymbol{R}_n$的两个线性子空间的并与交也是该空间的线性子空间.

1315. 证明：空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的两个线性子空间的并（或和）$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2$ 等于 $\boldsymbol{R}_n$ 中所有既包含 $\boldsymbol{L}_1$ 又包含 $\boldsymbol{L}_2$ 的线性子空间的交.

1316. 证明：空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的两个线性子空间的维数的和等于这两个子空间并的维数加上交的维数.

求线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的并的维数 $s$ 以及交的维数 $d$，其中 $\boldsymbol{L}_1$ 由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 张成，$\boldsymbol{L}_2$ 由向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ 张成：

1317. $\boldsymbol{a}_1=(1,2,0,1)$，$\boldsymbol{a}_2=(1,1,1,0)$；$\boldsymbol{b}_1=(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{b}_2=(1,3,0,1)$.

1318. $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1), \boldsymbol{a}_2=(1,-1,1,-1), \boldsymbol{a}_3=(1,3,1,3)$；$\boldsymbol{b}_1=(1,2,0,2), \boldsymbol{b}_2=(1,2,1,2), \boldsymbol{b}_3=(3,1,3,1)$.

1319.* 令 $\boldsymbol{L}_1$ 是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间，具有基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$，又 $\boldsymbol{L}_2$ 也是 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间，具有基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_l$.

证明关于子空间并 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2$ 的基底以及交 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{L}_1\cap\boldsymbol{L}_2$ 的基底的下列构成规则：

(1) 向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ 的极大线性无关子组，是并 $\boldsymbol{S}$ 的基底. 它的构成归结为计算由组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ 的坐标所组成的矩阵的秩.

(2) 把向量 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ 中的某几个加到线性无关向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$，可以得到并 $\boldsymbol{S}$ 的基底（参看习题 659）. 如果需要，改变这些向量的次序，可以认为 $s$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-k}$ 组成 $\boldsymbol{S}$ 的基底.

等式

$$x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_k\boldsymbol{a}_k=y_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+y_l\boldsymbol{b}_l \tag{1}$$

等价于具有 $k+l$ 个未知量 $x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_l$ 的，秩为 $s$ 的 $n$ 个齐次线性方程的方程组. 因为它的系数矩阵前 $s$ 列线性无关，这意味着，在这些列中至少有一个 $s$ 阶的子式不为零，所以，作为自由未知量可以取后 $k+l-s=d$ 个未知量 $y_{s-k+1}, \cdots, y_l$. 因此，对方

程组(1)可以求出基础解系

$$x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{is}, y_{i1}, y_{i2}, \cdots, y_{it} \ (i=1, 2, \cdots, d) \tag{2}$$

并使得

$$\begin{vmatrix} y_{1,s-k+1} & \cdots & y_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{d,s-k+1} & \cdots & y_{dt} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{3}$$

则向量组

$$\boldsymbol{c}_i = \sum_{j=1}^{t} y_{ij} \boldsymbol{b}_j \qquad (i=1, 2, \cdots, d) \tag{4}$$

是交 $\boldsymbol{D}$ 的基底.

注　因为 $d=k+l-s$，所以，这给出习题 1316 的第二个解法.

求由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ 所张成的两个线性子空间的并与交的基底:

1320. $\boldsymbol{a}_1=(1, 2, 1), \boldsymbol{a}_2=(1, 1, -1), \boldsymbol{a}_3=(1, 3, 3)$; $\boldsymbol{b}_1=(2, 3, -1), \boldsymbol{b}_2=(1, 2, 2), \boldsymbol{b}_3=(1, 1, -3)$.

1321. $\boldsymbol{a}_1=(1, 2, 1, -2), \boldsymbol{a}_2=(2, 3, 1, 0), \boldsymbol{a}_3=(1, 2, 2, -3)$; $\boldsymbol{b}_1=(1, 1, 1, 1), \boldsymbol{b}_2=(1, 0, 1, -1), \boldsymbol{b}_3=(1, 3, 0, -4)$.

1322. $\boldsymbol{a}_1=(1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2=(0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3=(0, 0, 1, 1)$; $\boldsymbol{b}_1=(1, 0, 1, 0), \boldsymbol{b}_2=(0, 2, 1, 1), \boldsymbol{b}_3=(1, 2, 1, 2)$.

1323. 证明: 如果空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的两个线性子空间并的维数比它们交的维数大 1, 则并与这两个子空间中的一个重合, 而交与另一个重合.

1324. 令 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ 是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间. 证明: $\boldsymbol{L}$ 是 $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ 的直接和当且仅当以下两个条件成立:

(a) $\boldsymbol{L}$ 包含 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$;

(b) 每一个向量 $x \in \boldsymbol{L}$ 唯一地表为形式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\quad \text{其中 } \boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{L}_1,\quad \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}_2.$$

换句话说，和 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2$ 是直接和当且仅当对任何一个向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}$ 表示法 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 是唯一的，其中 $\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}_2$.

1325. 证明：线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的和 $\boldsymbol{S}$ 是直接和当且仅当至少有一个向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$ 唯一地表为形式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$，其中 $\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}_2$.

1326. 令线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 是线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的直接和. 证明：$\boldsymbol{L}$ 的维数等于 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的维数的和；并且 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的任何基底合在一起给出 $\boldsymbol{L}$ 的基底.

1327. 证明：对空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任一线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$，可以求出另一子空间 $\boldsymbol{L}_2$，使得整个空间 $\boldsymbol{R}_n$ 是 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的直接和.

1328. 证明：空间 $\boldsymbol{R}_n$ 是两个线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的直接和，其中 $\boldsymbol{L}_1$ 用方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 给出，$\boldsymbol{L}_2$ 用方程组 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 给出. 求出单位向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)$，…，$\boldsymbol{e}_n=(0,0,0,\cdots,1)$ 平行于 $\boldsymbol{L}_2$ 在 $\boldsymbol{L}_1$ 上的射影，以及平行于 $\boldsymbol{L}_1$ 在 $\boldsymbol{L}_2$ 上的射影.

1329. 证明：所有 $n$ 阶方阵空间是线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的直接和，其中 $\boldsymbol{L}_1$ 是对称方阵子空间，$\boldsymbol{L}_2$ 是斜对称方阵子空间. 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

平行于 $\boldsymbol{L}_2$ 在 $\boldsymbol{L}_1$ 上的射影 $A_1$，以及平行于 $\boldsymbol{L}_1$ 在 $\boldsymbol{L}_2$ 上的射影 $A_2$.

1330. 证明：具有 $n$ 个未知量的秩为 $r$ 的任何相容线性方程组的解，组成空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的维数为 $d=n-r$ 的线性流形. 反之，对空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何 $d$ 维线性流形 $\boldsymbol{P}$，存在 $n$ 个未知量的秩为 $r=n-d$ 的

线性方程组,它的解恰好充满该流形 $\boldsymbol{P}$.

1331. 令给定两个线性流形(参看引言) $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{x}_2$, 其中 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 是线性子空间, $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$ 是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的向量. 证明: $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2$ 当且仅当 $\boldsymbol{L}_1=\boldsymbol{L}_2$ 和 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}_1$. 如此说来,用平行移动得到所给流形的那个线性空间是唯一确定的.

1332. 证明: 如果 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{x}_0$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 是线性子空间, 而 $\boldsymbol{x}_0$ 是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的一个向量,则向量 $\boldsymbol{x}_0$ 属于流形 $\boldsymbol{P}$, 并且用任何向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{P}$ 替换 $\boldsymbol{x}_0$ 得到同一流形 $\boldsymbol{P}$.

1333. 证明:如果一直线与一线性流形有两个公共点,则它完全含于这个流形(此时点与有同样坐标的向量,亦即由坐标原点通至该点的向量,视为同一).

1334* 证明: 空间 $\boldsymbol{R}_n(n\geqslant3)$ 的任何二直线包含于 $\boldsymbol{R}_n$ 内的某三维线性流形之中.

1335. 求使空间 $\boldsymbol{R}_n(n>1)$ 的两条直线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1t$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1t$ 位于一个平面内的充分必要条件.

1336. 求使两条直线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1t$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1t$ 穿过一点但不重合的充分必要条件. 指出求这两条直线的交点的方法.

求两直线 $\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1t$ 和 $\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1t$ 的交点:

1337. $\boldsymbol{a}_0=(2,1,1,3,-3)$, $\boldsymbol{a}_1=(2,3,1,1,-1)$;

$\boldsymbol{b}_0=(1,1,2,1,2)$, $\boldsymbol{b}_1=(1,2,1,0,1)$.

1338. $\boldsymbol{a}_0=(3,1,2,1,3)$, $\boldsymbol{a}_1=(1,0,1,1,2)$;

$\boldsymbol{b}_0=(2,2,-1,-1,-2)$, $\boldsymbol{b}_1=(2,1,0,1,1)$.

1339. 设已知点用向量 $\boldsymbol{c}$ 的终点给出, 求过此点可以引唯一直线与两给定直线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1t$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1t$ 相交的充分必要条件. 指出作这种直线的方法,并求交点.

求一直线, 使它通过用向量 $\boldsymbol{c}$ 给出的点并且与直线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1t$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1t$ 相交; 求出所求直线与上述两给定直线的交点:

1340. $\boldsymbol{a}_0=(1,0,-2,1)$, $\boldsymbol{a}_1=(1,2,-1,-5)$;

$\boldsymbol{b}_0=(0,1,1,-1)$, $\boldsymbol{b}_1=(2,3,-2,-4)$;

$\boldsymbol{c}=(8,9,-11,-15)$.

1341. $\boldsymbol{a}_0=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_1=(1,2,1,0)$;

$\boldsymbol{b}_0=(2,2,3,1)$, $\boldsymbol{b}_1=(1,0,1,3)$; $\boldsymbol{c}=(4,5,2,7)$.

1342. 证明：空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何两个平面包含于维数$\leqslant 5$的一个线性流形内.

1343. 证明：空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的维数分别为 $k$ 和 $l$ 的两个线性流形包含于维数$\leqslant k+l+1$的一个线性流形内.

1344. 证明：如果空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的两个线性流形——$k$ 维的 $\boldsymbol{P}$ 和 $l$ 维的 $\boldsymbol{Q}$ 有公共点，并且 $k+l>n$，则其交是维数$\geqslant k+l-n$的线性流形. 由此对三维和四维空间推出什么定理？

1345. 述说 $n$ 维空间中两个平面 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1t+\boldsymbol{a}_2t_2$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1t_1+\boldsymbol{b}_2t_2$ 相互位置的所有情形，并指出每种情形的充要条件.

1346. 令

$$\boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k \tag{1}$$

是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何 $k+1$ 个向量. 证明：形如

$$\boldsymbol{x}=\alpha_0\boldsymbol{a}_0+\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k \tag{2}$$

的所有向量组成线性流形 $\boldsymbol{P}$，其中数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 满足条件

$$\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k=1. \tag{3}$$

$\boldsymbol{P}$ 的维数等于向量组

$$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_0,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_0 \tag{4}$$

的秩，$\boldsymbol{P}$ 是包含所有向量(1)的最小维的流形. 这些向量中的任一个都可以担任 $\boldsymbol{a}_0$ 的角色. 反之，对任一 $k$ 维线性流形 $\boldsymbol{P}$，存在 $k+1$ 个向量的组(1)使得 $\boldsymbol{P}$ 是由满足条件(3)的所有形如(2)的向量所组成，并且向量组(4)线性无关.

1347.* 用形如 $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2$ 的向量（其中 $\alpha_1+\alpha_2=1$，$0\leqslant\alpha_1,\alpha_2\leqslant1$）所给出的所有点的集合，称为空间 $\boldsymbol{R}_n$ 中**端点在向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 的终点的线段**．空间 $\boldsymbol{R}_n$ 中的点集合 $M$ 称为**凸集**，如果对于 $M$ 中的任何两点，以这两点为端点的线段全部含于 $M$．证明：空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何一组凸集的交是凸集．$\boldsymbol{R}_n$ 中所有包含已知集合 $A$ 的凸集的交，称为 $\boldsymbol{R}_n$ 中 $A$ 的凸闭包．证明：空间 $\boldsymbol{R}_n$ 中用向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 给出的有限点组的**凸闭包**，由形如 $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k$ 的向量给出的所有点组成，其中 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$，$0\leqslant\alpha_i\leqslant1$（$i=1,2,\cdots,k$）．

1348.* 求四维平行多面体（在笛卡尔直角坐标系的情形则为四维立方体）$|x_i|\leqslant1(i=1,2,3,4)$ 用方程为 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 的三维超平面所截得的体的形状．

1349.* 三维坐标子空间和超平面 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$ 限定出一个四维四面形，试求它平行于直线 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 在子空间 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 上的射影．

1350.* 设给定一个 $n$ 维平行多面体及其一条对角线．过起点在该对角线的同一个端点的所有 $n$ 个棱的终点得到一个线性流形，过平行多面体所有顶点平行于上述流形又可得一些 $n-1$ 维的线性流形．试证明：这些 $n-1$ 维的线性流形与该对角线的交点把这对角线分成 $n$ 等份．

## §17. 欧几里得空间和酉空间

设 $\boldsymbol{R}_n$ 是实数域（复数域）上的 $n$ 维向量空间．如果使每一对向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 与一个实数（复数）$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 相对应（这数称为这两个向量的**纯量积**①），并且满足以下条件：

① 也称作数量积，内积（译者注）．

(a) 在实数域的情形:

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;

(2) $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$;

(3) 对任何实数 $\alpha$, $(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$;

(4) 如果 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 则 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$;

则此时称 $\boldsymbol{R}_n$ 为**欧几里得空间**(简称欧氏空间).

(b) 在复数域的情形:

(1′) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$;

(2′) $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$

(与欧氏空间(2)一样);

(3′) 对任何复数 $\alpha$, $(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$;

(4′) 如果 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 则 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$

(与欧氏空间(4)一样);

此时称 $\boldsymbol{R}_n$ 为**酉空间**.

基底(或者, 一般地, 任何向量组) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 称为**标准正交的**, 如果

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

如果没有另外说明, 则一切向量的坐标都假定是在某标准正交基底下而取的.

如果 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, 则向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 称为**正交的**.

向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 的正交化过程是指从这向量组转变到用下列方法构造的新向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 的过程: $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$; $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \boldsymbol{b}_i$ $(k = 2, 3, \cdots, s)$, 其中, 如果 $\boldsymbol{b}_i \neq \boldsymbol{0}$, 则 $c_i = \dfrac{(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_i)}{(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, k-1)$; 如果 $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$, 则 $c_i$ 可取任何数.

在 $(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_i) = 0$ 条件下, 用 $\boldsymbol{b}_i$ 乘通过 $\boldsymbol{a}_k$ 和 $\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k-$

1)表示 $\boldsymbol{b}_k$ 的等式，即可得到 $c_i$ 的值.

1351. 从本节引言所列出的纯量积的性质，推出下列性质：

(a) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$，对欧几里得空间（或酉空间）的任何向量；

(b) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，对欧几里得空间的任何向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 和任何实数 $\alpha$；

(c) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y})=\bar{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，对酉空间的任何向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 和任何复数 $\alpha$；

(d) $(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$；

(e) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})=0$.

1352. 双线性型 $g=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$ 应当具有怎样的性质，才能使得这型关于实向量空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 在某基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

的值，可以取为该两向量的纯量积，从而定义出 $n$ 维欧几里得空间？被选出的基底向量的纯量积等于什么？

1353. 令给定 Hermite 双线性型

$$g=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\bar{y}_j.$$

未知量 $\bar{y}_j$ 上的一小横表示：当 $y_j$ 用它的数值 $\alpha_j$ 替换时，$\bar{y}_j$ 应当用复共轭值 $\bar{\alpha}_j$ 替换. 令这型的矩阵 $A=(a_{ij})_1^n$ 是 Hermite 矩阵，亦即 $\bar{a}_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$. 证明：相对应的 Hermite 二次型 $f=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\bar{x}_j$ 在任何复值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值是实数，而且如果型 $f$ 是正定的，亦即对任何不全为零的复值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$f>0$，则用等式

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\bar{y}_j$$

给出纯量积，从而变这空间为一酉空间，其中 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 是复向量空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 在某基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标；并且任何酉空间都可以用此种方法得到.

1354. 证明：欧几里得空间任何两个向量

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

的纯量积可用等式

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

表出当且仅当于其中取坐标的那个基底是标准正交的.

1355. 令 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 是欧几里得空间（或酉空间）$\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间，并且 $\boldsymbol{L}_1$ 的维数小于 $\boldsymbol{L}_2$ 的维数. 证明：在 $\boldsymbol{L}_2$ 中可找到非零向量与 $\boldsymbol{L}_1$ 中的所有向量正交.

1356. 证明：任何两两正交非零向量的组（特别地，任何标准正交组）是线性无关的.

验证下列各组中的向量是两两正交的，并添加向量使它们成为正交基底：

1357. $(1, -2, 2, -3), (2, -3, 2, 4)$.

1358. $(1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3)$.

求补足下列向量组成为标准正交基底时所添进的向量：

1359. $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

1360. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

应用正交化过程（参看引言），构造出用下列向量组所张成的

子空间的正交基底：

1361. (1, 2, 2, −1), (1, 1, −5, 3), (3, 2, 8, −7).

1362. (1, 1, −1, −2), (5, 8, −2, −3), (3, 9, 3, 8).

1363. (2, 1, 3, −1), (7, 4, 3, −3),

(1, 1, −6, 0), (5, 7, 7, 8).

1364. 空间 $\boldsymbol{R}_n$ 中与子空间 $\boldsymbol{L}$ 所有向量正交的所有向量的集 $\boldsymbol{L}^*$，称为 $\boldsymbol{L}$ 的**正交补**。

证明：

(a) $\boldsymbol{L}^*$ 是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间；

(b) $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L}^*$ 的维数的和等于 $n$；

(c) 空间 $\boldsymbol{R}_n$ 是子空间 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L}^*$ 的直接和.

1365. 证明：空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间的正交补，具有下列性质：

(a) $(\boldsymbol{L}^*)^* = \boldsymbol{L}$;

(b) $(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2)^* = \boldsymbol{L}_2^* \cap \boldsymbol{L}_2^*$;

(c) $(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2)^* = \boldsymbol{L}_1^* + \boldsymbol{L}_2^*$;

(d) $\boldsymbol{R}_n^* = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}^* = \boldsymbol{R}_n$,

其中 $\boldsymbol{O}$是零子空间，它只包含零向量.

1366. 用向量

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 2, 1),$$
$$\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 2, 3),$$
$$\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, -2, 1),$$

张成的子空间记为$\boldsymbol{L}$，求 $\boldsymbol{L}$ 的正交补 $\boldsymbol{L}^*$ 的基底.

1367. 线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 用下列方程给出：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

求给出正交补 $\boldsymbol{L}^*$ 的诸方程.

1368. 证明：空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 和它的正交补 $\boldsymbol{L}^*$ 在标准正交基底下有如下联系：给出这两子空间之一的那些线性无关线性方程组的系数，是另一子空间基底向量的坐标.

1369. 令 $\boldsymbol{L}$ 是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间. 证明：$\boldsymbol{R}_n$ 中的任何向量 $\boldsymbol{x}$ 可唯一地表为形式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$，其中 $\boldsymbol{y}$ 属于 $\boldsymbol{L}$，而 $\boldsymbol{z}$ 正交于 $\boldsymbol{L}$. $\boldsymbol{y}$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在子空间 $\boldsymbol{L}$ 上的正交射影，而 $\boldsymbol{z}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 关于 $\boldsymbol{L}$ 的正交分量. 指出计算 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 的方法.

求向量 $\boldsymbol{x}$ 在线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 上的正交射影 $\boldsymbol{y}$ 和正交分量 $\boldsymbol{z}$:

1370. $\boldsymbol{x}=(4,-1,-3,4)$. $\boldsymbol{L}$ 用下列向量张成:

$$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1),\ \boldsymbol{a}_2=(1,2,2,-1),$$
$$\boldsymbol{a}_3=(1,0,0,3).$$

1371. $\boldsymbol{x}=(5,2,-2,2)$. $\boldsymbol{L}$ 用以下向量张成:

$$\boldsymbol{a}_1=(2,1,1,-1),\ \boldsymbol{a}_2=(1,1,3,0),\ \boldsymbol{a}_3=(1,2,8,1).$$

1372. $\boldsymbol{x}=(7,-4,-1,2)$. $\boldsymbol{L}$ 用下列方程给定:

$$2x_1-x_2+x_3-3x_4=0,$$
$$3x_1+2x_2+2x_3-x_4=0,$$
$$x_1+2x_2+2x_3-9x_4=0.$$

1373*. 由向量 $\boldsymbol{x}$ 所给出的点到线性流形 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{x}_0$ 的距离，指的是由该点到流形点的距离的最小值，亦即向量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}$ 的长度的最小值，其中 $\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的向量.

证明：这个距离等于向量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 关于线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 的正交分量 $\boldsymbol{z}$ 的长度（其中 $\boldsymbol{L}$ 的平行移动得到流形 $\boldsymbol{P}$）.

1374. 求向量 $\boldsymbol{x}$ 所给出的点到下列方程组给出的线性流形的距离:

(a) $\boldsymbol{x}=(4,2,-5,1)$;

$$2x_1-2x_2+x_3+2x_4=9,$$

$$2x_1-4x_2+2x_3+3x_4=12.$$

(b) $\boldsymbol{x}=(2, 4, -4, 2)$;

$$x_1+2x_2+x_3-x_4=1,$$

$$x_1+3x_2+x_3-3x_4=2.$$

1375* 证明：从向量 $\boldsymbol{x}$ 所给出的点到线性流形 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{x}_0$ 的距离，可借助于 Gram 行列式(参看习题 1415)用以下公式计算之：

$$d^2=\frac{G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k)},$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是具有基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 的线性子空间.

1376* 两个线性流形 $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{x}_2$ 之间的距离，指的是任何两点——其中之一属于 $\boldsymbol{P}_1$，而另一点属于 $\boldsymbol{P}_2$——的距离的最小值. 证明：这个距离等于向量 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 关于线性子空间 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2$ 的正交分量的长度.

1377. 求两个平面 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_1t_1+\boldsymbol{a}_2t_2+\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_3t_1+\boldsymbol{a}_4t_2+\boldsymbol{x}_2$ 之间的距离，其中

$$\boldsymbol{a}_1=(1, 2, 2, 2),\ \boldsymbol{a}_2=(2, -2, 1, 2),$$

$$\boldsymbol{a}_3=(2, 0, 2, 1),\ \boldsymbol{a}_4=(1, -2, 0, -1);$$

$$\boldsymbol{x}_1=(4, 5, 3, 2),\ \boldsymbol{x}_2=(1, -2, 1, -3).$$

1378* 彼此等距的 $n+1$ 个点的组的凸闭包(参看习题1347)，称为欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_p$ 的正则 $n$ 维单纯形($p\geqslant n$). 该组的点称为顶点，连接它们的线段称为棱，而该组的 $k+1$ 个点的子组的凸闭包称为单纯形的 $k$ 维面. 两个面称为对立的，如果它们没有公共顶点，且单纯形 $n+1$ 个顶点中的任何一个是这两个面之一的顶点.

求棱长为 1 的 $n$ 维单纯形的 $k$ 维和 $n-k-1$ 维的两个对立面之间的距离，并证明：它等于这两个面的中心间的距离.

1379* 令 $\boldsymbol{e}$ 是欧几里得空间(或酉空间) $\boldsymbol{R}_n$ 的单位长的向量.

证明：$\boldsymbol{R}_n$ 中的任何向量 $\boldsymbol{x}$ 可唯一地表为形式 $\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{e}+\boldsymbol{z}$，其中 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e})=0$. 数 $\alpha$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的射影，并用 $\mathrm{pr}_e\boldsymbol{x}$ 表示. 证明：

(a) $\mathrm{pr}_e(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\mathrm{pr}_e\boldsymbol{x}+\mathrm{pr}_e\boldsymbol{y}$;

(b) $\mathrm{pr}_e(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\mathrm{pr}_e\boldsymbol{x}$;

(c) $\mathrm{pr}_e\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})$;

(d) 对任何标准正交基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 和任何向量 $\boldsymbol{x}$，成立等式

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{pr}_{e_i}\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{e}_i.$$

1380.* 令 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 是欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的标准正交向量组. 证明：对 $\boldsymbol{R}_n$ 中任何向量 $\boldsymbol{x}$ 成立不等式(Bessel 不等式)：

$$\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{pr}_{e_i}\boldsymbol{x})^2\leqslant|\boldsymbol{x}|^2,$$

并且这不等式对 $\boldsymbol{R}_n$ 中任何 $\boldsymbol{x}$ 变成等式(Parseval 等式)当且仅当 $k=n$，亦即当组 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 是标准正交基底.

1381.* 证明：Cauchy-Bunyakovsky 不等式

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\leqslant(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}),$$

对欧几里得空间的任何向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$；并且等号成立当且仅当向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 线性相关.

1382.* 证明 Cauchy-Bunyakovsky 不等式

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\leqslant(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}),$$

对酉空间任何向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$；并且等号成立当且仅当向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 线性相关.

1383. 利用 Cauchy-Bunyakovsky 不等式，证明下列不等式：

(a) 对任何实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$; $b_1,b_2,\cdots,b_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

(参看习题 503).

(b) 对任何复数 $a_1, \cdots, a_n; b_1, \cdots, b_n$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$$

(参看习题 505).

1384. 对区间$[a, b]$上的所有实连续函数, 具有通常的函数加法以及纯量与函数的乘法, 则它是一无限维向量空间; 现给出纯量积

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

试验证欧几里得空间纯量积的所有性质都成立, 并写出这空间的 Cauchy-Bunyakovsky 不等式.

对已给出顶点坐标的三角形, 求边长及内角:

1385. $A(2, 4, 2, 4, 2), B(6, 4, 4, 4, 6), C(5, 7, 5, 7, 2)$.

1386. $A(1, 2, 3, 2, 1), B(3, 4, 0, 4, 3), C\left(1+\frac{5}{26}\sqrt{78}, 2+\frac{5}{13}\sqrt{78}, 3+\frac{10}{13}\sqrt{78}, 2+\frac{5}{13}\sqrt{78}, 1+\frac{5}{26}\sqrt{78}\right)$.

1387. 证明初等数学中关于两条垂线的定理的下列推广: 如果欧几里得空间(或酉空间)的向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 中的每一个都正交, 则它正交于由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 张成的线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 的每一个向量.

1388. 证明: 如果 $\boldsymbol{x}=\alpha \boldsymbol{y}$, 则 $|\boldsymbol{x}|=|\alpha| \cdot |\boldsymbol{y}|$, 其中 $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$ 是向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的长.

1389*. 证明: $n$ 维长方体的一条对角线的平方, 等于由同一个顶点引出的各棱的平方和(Pythagoras 定理的 $n$ 维推广).

1390* 证明定理：平行四边形对角线平方之和，等于它各边的平方和。

1391. 利用向量的纯量乘法，证明定理：三角形一边的平方，等于其余两边平方之和减去这两边乘积的二倍乘以其间夹角的余弦。

1392. 利用 Cauchy-Bunyakovsky 不等式证明三角不等式：如果 $\rho(X,Y)$ 表示点 $X$ 和 $Y$ 之间的距离，则对任何三点 $A, B, C$ 有

$$\rho(A,B)+\rho(B,C)\geqslant\rho(A,C),$$

并且等式成立当且仅当由 $A$ 到 $B$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 和由 $B$ 到 $C$ 的向量 $\boldsymbol{y}$ 共线且方向相同。

1393. 求 $n$ 维立方体中与一条给定对角线正交的对角线的数目。

1394. 求棱长为 $a$ 的 $n$ 维立方体的对角线的长，并求这长当 $n\to\infty$ 时的极限。

1395. 证明：$n$ 维立方体的所有对角线与它所有的棱组成同一个角 $\varphi_n$。求这个角及其当 $n\to\infty$ 时的极限。对怎样的 $n$ 得到 $\varphi_n=60°$？

1396. 求外接于棱 $a$ 的 $n$ 维立方体的球的半径 $R$；对不同的 $n$，量 $R$ 和 $a$ 哪个大？

1397. 证明：$n$ 维立方体的任何棱在这立方体任何对角线上的正交射影，按绝对值等于对角线长的 $\frac{1}{n}$。

1398* 证明：$n$ 维立方体的各顶点在它任一对角线上的正交射影分该对角线为 $n$ 等份。

1399* 令 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的非零向量。证明：

(a) $\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{y}$，其中 $\alpha>0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的夹角等于零；

(b) $\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{y}$，其中 $\alpha<0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的夹角等于 $\pi$。

1400.* 证明：在线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 的所有向量中，向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{L}$ 上的正交射影 $\boldsymbol{y}$，与所给定的向量 $\boldsymbol{x}$ 组成最小角，同时，等式 $\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}')$ 成立（其中 $\boldsymbol{y}'\in\boldsymbol{L}$）当且仅当 $\boldsymbol{y}'=\alpha\boldsymbol{y}$，其中 $\alpha>0$.

1401. 求 $n$ 维立方体对角线和它的 $k$ 维面之间的夹角.

求向量 $\boldsymbol{x}$ 和由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 张成的线性子空间之间的夹角：

1402. $\boldsymbol{x}=(2,2,1,1)$；$\boldsymbol{a}_1=(3,4,-4,-1)$，
$\boldsymbol{a}_2=(0,1,-1,2)$.

1403. $\boldsymbol{x}=(1,0,3,0)$；$\boldsymbol{a}_1=(5,3,4,-3)$，
$\boldsymbol{a}_2=(1,1,4,5)$，$\boldsymbol{a}_3=(2,-1,1,2)$.

1404. 欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的两个没有公共非零向量的线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 之间的夹角，指的是：非零向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 之间夹角的最小值，其中 $\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}_2$. 如果交 $\boldsymbol{L}_1\cap\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{0}$，并且 $\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{L}_2$，则 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 之间的夹角指的是：它们与 $\boldsymbol{D}$ 的正交补 $\boldsymbol{D}^*$ 的两个交之间的夹角. 如果所给定的两个子空间之一包含于另一个之中（特别地，如果它们重合），则它们之间的夹角认为等于零. 线性流形之间的夹角是指与线性流形相对应的子空间之间的夹角. 试证明：任何子空间之间或流形之间的夹角始终是确定的，而等于零当且仅当子空间之一或流形之一包含于另一个之中，或者流形是平行的.

1405.* 求正则四维单纯形（参看习题 1378）$A_0A_1A_2A_3A_4$ 的二维面 $A_0A_1A_2$ 和 $A_0A_3A_4$ 之间的夹角.

1406.* 求平面 $\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1t_1+\boldsymbol{a}_2t_2$ 和 $\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1t_1+\boldsymbol{b}_2t_2$ 之间的夹角，其中 $\boldsymbol{a}_0=(3,1,0,1)$，$\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,0)$，$\boldsymbol{a}_2=(0,1,0,0)$，$\boldsymbol{b}_0=(2,1,1,3)$，$\boldsymbol{b}_1=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{b}_2=(1,-1,1,-1)$.

1407.* 令给定线性无关向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ 和两个非零向量的正交组 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_k$ 和 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_k$，并且向量 $\boldsymbol{f}_k$ 和 $\boldsymbol{g}_k$ 可用

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k (k=1, 2, \cdots, s)$线性表示．证明：$\boldsymbol{f}_k=\alpha_k \boldsymbol{g}_k (k=1, 2, \cdots, s)$，其中$\alpha_k \neq 0$．

1408.* 令$\boldsymbol{R}_{n+1}$是欧几里得空间——它的向量是所有一个未知量$x$的实系数的次数$\leqslant n$的多项式，而多项式$f(x)$和$g(x)$的纯量积定义如下：

$$(f, g)=\int_{-1}^{+1} f(x) g(x) d x .$$

证明：下列多项式（称为 Legendre 多项式）

$$P_0(x)=1,$$

$$P_k(x)=\frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{d x^k}\left[(x^2-1)^k\right], (k=1, 2, \cdots, n)$$

组成空间$\boldsymbol{R}_{n+1}$的正交基底．

1409. 由在前题中所给出的 Legendre 多项式的定义出发，对$k=0, 1, 2, 3, 4$求出多项式$P_k(x)$．试确立$P_k(x)$的次数为$k$，并对任何$k$写出$P_k(x)$按$x$的幂的展开式．

1410.* 把 Legendre 多项式$P_k(x)$看成习题 1408 中欧几里得空间$\boldsymbol{R}_{n+1}$的向量，试计算它的"长度"．

1411.* 计算 Legendre 多项式$P_k(x)$当$x=1$的值．

1412.* 证明：如果对习题 1408 的欧几里得空间$\boldsymbol{R}_{n+1}$的基底$1, x, x^2, \cdots, x^n$运用正交化过程，则得到多项式$f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x)$，它们与相对应的 Legendre 多项式只差常量因子．求出这些因子．

1413. 假设正交化过程把向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$相应地化为向量$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$．证明：$\boldsymbol{b}_k$是向量$\boldsymbol{a}_k$关于由$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1} (k>1)$所张成的线性子空间$\boldsymbol{L}_{k-1}$的正交分量．其次，证明：

$$0 \leqslant |\boldsymbol{b}_k| \leqslant |\boldsymbol{a}_k|, (k=1, 2, \cdots, n),$$

并且$|\boldsymbol{b}_k|=0$当且仅当$\boldsymbol{a}_k$可用$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1} (k>1)$线性表示或者$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0} (k=1)$；$|\boldsymbol{b}_k|=|\boldsymbol{a}_k|$当且仅当$(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j)=0 (j=1, 2, \cdots, k-1;$

$k>1$)或者 $k-1$.

1414.* 令 $f(x)$ 是实系数的首项系数为 1 的 $n$ 次多项式，证明：积分 $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx$ 达到自己的最小值 $\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(C_{2n}^{n})^2}$ 当且仅当 $f(x)=\frac{2^n}{C_{2n}^{n}}P_n(x)$，其中 $P_n(x)$ 是 $n$ 次的 Legendre 多项式(参看习题1408).

1415. 行列式

$$g(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k)=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\cdots(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_k)\\(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)\cdots(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_k)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_2)\cdots(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k)\end{vmatrix}$$

称为欧几里得空间(酉空间) $\boldsymbol{R}_n$ 的向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 的 Gram 行列式.

证明：当对向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 应用正交化过程时，格拉姆行列式不变，亦即如果向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 经过正交化后化为向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k$，则

$$g(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k)=g(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)\cdots(\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{b}_k).$$

利用这点，说明各向量线性无关时，$g(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ 和 $g(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 的几何意义.

1416.* 证明：欧几里得空间(或酉空间)中的向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 线性相关必要且充分的条件是这些向量的 Gram 行列式等于零.

1417.* 欧几里得空间(或酉空间)的两个基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 称为**对偶基**，如果

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{f}_j)=\begin{cases}1, \text{当 } i=j,\\0, \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

证明：对任何基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，对偶基存在且唯一确定.

1418. 令 $S$ 是从基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到基底 $\boldsymbol{e}_1',\cdots,\boldsymbol{e}_n'$ 的转移矩

阵．求从 $e_1, \cdots, e_n$ 的对偶基 $f_1, \cdots, f_n$ 到 $e'_1, \cdots, e'_n$ 的对偶基 $f'_1, \cdots, f'_n$ 的转移矩阵 $T$．试分别在

(a) 欧几里得空间，

(b) 酉空间

中解上述问题．

1419* 证明：如果向量 $a_1, \cdots, a_k$ 线性相关，则 Gram 行列式 $g(a_1, \cdots, a_k)$ 等于零；如果线性无关，则行列式是正的．

1420. 证明：如果线性无关向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 用正交化过程化为向量 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，则

$$|b_k|^2 = \frac{g(a_1, \cdots, a_k)}{g(a_1, \cdots, a_{k-1})}$$

$(k=1, 2, \cdots, n$；零个向量的 Gram 行列式假设为 1)．

1421* 在一个未知量的实系数的次数不高于 $n$ 的多项式空间中，纯量积用下面等式给出：

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

求坐标原点到由所有首项系数为 1 的 $n$ 次多项式所组成的线性流形的距离．

1422* 证明：对格拉姆行列式成立不等式

$$0 \leqslant g(a_1, \cdots, a_k) \leqslant |a_1|^2 \cdots |a_k|^2;$$

并且，$g(a_1, \cdots, a_k) = 0$ 当且仅当向量 $a_1, \cdots, a_k$ 线性相关；而 $g(a_1, \cdots, a_k) = |a_1|^2 \cdots |a_k|^2$ 当且仅当向量 $a_1, \cdots, a_k$ 两两正交或者其中至少有一个是零向量．

1423. 利用前题，证明 Hadamard 不等式，即：如果 $D = |a_{ij}|_1^n$ 是实元素的行列式，则

$$D^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

(参看习题 923)；并且等号成立当且仅当 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=0\ (i\neq j;\ i,\ j=1, 2, \cdots, n)$，或者行列式 $D$ 包含零行. 对于复元素的行列式，上列断言如何改变？

1424.* 证明：正定二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 的行列式 $D_f$ 满足不等式

$$D_f\leqslant\prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1425.* 证明：具有非负主子式的任何实对称矩阵 $A=(a_{ij})_1^n$ 是 Gram 矩阵，亦即存在欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的向量组 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 使得

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=a_{ij}\quad(i, j=1, 2, \cdots, n).$$

1426.* 证明：具有非负主子式的任何 Hermite 矩阵 $A=(a_{ij})_1^n$ 是 Gram 矩阵，亦即存在酉空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的向量组 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 使得

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=a_{ij}\quad(i, j=1, 2, \cdots, n).$$

1427.* 对于由欧几里得空间中线性无关向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 所构成的 $n$ 维平行多面体，我们用下列条件递归地定义它的体积 $V$:

(1) $V(\boldsymbol{a}_1)=|\boldsymbol{a}_1|$;

(2) $V(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=V(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1})\cdot h_n$，其中 $h_n$ 是向量 $\boldsymbol{a}_n$ 关于由向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 所张成的子空间的正交分量的长. 证明:

$$V(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=\sqrt{g(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)}=|D|,$$

其中 $D$ 是由给定诸向量在由向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 所张成的 $n$ 维空间的某一标准正交基底下的坐标所组成的行列式.

1428.* 证明：$n$ 维平行多面体的体积不超过由一个顶点出发的各棱长的乘积，而等于这个乘积当且仅当这些棱两两正交，亦即平行多面体是长方的.

1429.* 证明 Gram 行列式的下列性质:

$$g(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l) \leqslant g(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k) g(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l). \qquad (1)$$

并且等号成立当且仅当

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, k; j=1, 2, \cdots, l), \qquad (2)$$

或者子组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ 中至少有一组是线性相关的.

1430.* 证明平行多面体体积的下一性质:

$$V(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k; \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l) \leqslant V(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k) V(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l),$$

并且等号成立当且仅当

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, k; j=1, 2, \cdots, l).$$

1431.* 证明: 如果 $A$ 是具有非负主子式的 $n$ 阶实对称矩阵, $A_1$ 是矩阵 $A$ 左上角的 $k<n$ 阶的矩阵, $A_2$ 是右下角 $n-k$ 阶的矩阵, 则 $|A| \leqslant |A_1| \cdot |A_2|$ (与习题 922 比较).

1432.* 如果 $A$ 是具有非负主子式的 Hermite 矩阵, 解与前题类似的问题.

1433.* 求必要且充分条件, 使得 $C_{n+1}^2$ 个正数

$$a_{ij} (i, j=0, 1, 2, \cdots, n; i>j) \qquad (1)$$

是

(*a*) 欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的某 $n$ 维单纯形所有可能的顶点(亦即不位于一个 $n-1$ 维线性流形内的 $n+1$ 个点的组)对的距离;

(*b*) 欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_n$ 某 $n+1$ 个点的组的所有可能点对的距离.

## §18. 任意向量空间的线性变换

本节我们主要研究仿射向量空间的线性变换. 欧几里得空间和酉空间的变换在下节研究.

线性变换用 $\varphi$ 和 $\psi$ 等表示, 向量 $\boldsymbol{x}$ 在变换 $\varphi$ 下的象用 $\varphi\boldsymbol{x}$ 表示, 向量组 $\varphi\boldsymbol{a}_1, \cdots, \varphi\boldsymbol{a}_n$ 用 $\varphi(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ 表示.

矩阵 $A_\varphi$ 称为线性变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵，其中 $A_\varphi$ 的列由基底的象 $\varphi\boldsymbol{e}_1, \cdots, \varphi\boldsymbol{e}_n$ 在该基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标所组成. 换句话说，矩阵 $A_\varphi$ 为等式

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)A_\varphi \tag{1}$$

所决定. 令 $T$ 是从基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 到基底 $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 的转移矩阵(参看 § 16 的引言)，$A_\varphi$ 和 $B_\varphi$ 分别是变换 $\varphi$ 在第一和第二个基底下的矩阵. 则我们有关系式

$$B_\varphi = T^{-1}A_\varphi T. \tag{2}$$

在同一基底下，利用线性变换 $\varphi$ 的矩阵 $A_\varphi = (a_{ij})_1^n$，向量 $\boldsymbol{x}$ 在线性变换 $\varphi$ 下的象 $\varphi\boldsymbol{x}$ 的坐标 $y_1, \cdots, y_n$，可用原象 $\boldsymbol{x}$ 的坐标(分量) $x_1, \cdots, x_n$ 表示如下:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或者用矩阵形式写为:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

用下列等式所定义的变换

$$(\varphi + \psi)\boldsymbol{x} = \varphi\boldsymbol{x} + \psi\boldsymbol{x},$$
$$(\varphi\psi)\boldsymbol{x} = \varphi(\psi\boldsymbol{x}),$$
$$(\alpha\varphi)\boldsymbol{x} = \alpha(\varphi\boldsymbol{x})$$

(对空间 $\boldsymbol{R}_n$ 中任何向量 $\boldsymbol{x}$)，分别称为两个线性变换 $\varphi$ 和 $\psi$ 的和 $\varphi + \psi$，积 $\varphi\psi$，纯量 $\alpha$ 与线性变换 $\varphi$ 的乘积.

1434. 证明：一个平面围绕坐标原点旋转角 $\alpha$ 的旋转是线性变换，并求这个变换在任何一个标准正交基底下的矩阵，如果由第一个基底向量到第二个基底向量最近的转动方向取作计算角的正向.

1435. 证明：三维空间绕在直角坐标系中用方程 $x_1=x_2=x_3$ 给出的直线转动角 $\frac{2}{3}\pi$ 的旋转是一个线性变换，并求这个变换在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$——坐标轴上的单位向量——下的矩阵.

1436. 证明：三维空间平行于向量 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的坐标平面在向量 $\boldsymbol{e}_1$ 的坐标轴上的射影，是一个线性变换；并求它在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵.

1437. 证明：三维空间平行于向量 $\boldsymbol{e}_3$ 的坐标轴在向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的坐标平面上的射影，是一个线性变换；并求它在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵.

1438. 证明：三维空间在与直角坐标系各轴组成等角的轴上的正交射影，是线性变换；并求它在由各坐标轴的单位向量组成的基底下的矩阵.

1439. 令空间 $\boldsymbol{R}_n$ 是具有基底 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 的线性子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和具有基底 $\boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性子空间 $\boldsymbol{L}_2$ 的直接和. 证明：空间平行于 $\boldsymbol{L}_2$ 在 $\boldsymbol{L}_1$ 上的射影是线性变换，并求这个变换在基底 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 下的矩阵.

1440. 证明：存在空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的唯一的一个线性变换，变给定的线性无关向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 为给定的向量 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$. 怎样求这个变换在基底 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 下的矩阵?

向量 $\varphi\boldsymbol{x}$ 的坐标作为向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标的函数而给出，试问这样给出的下列变换 $\varphi$ 哪些是线性的? 在线性的情形，求变换在给出向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\varphi\boldsymbol{x}$ 坐标的那个基底下的矩阵：

1441. $\varphi\boldsymbol{x}=(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2+x_3)$.

1442. $\varphi\boldsymbol{x}=(x_1, x_2+1, x_3+2)$.

1443. $\varphi\boldsymbol{x}=(2x_1+x_2, x_1+x_3, x_3^2)$.

1444. $\varphi\boldsymbol{x}=(x_1-x_2+x_3, x_3, x_2)$.

证明：存在三维空间的唯一的一个线性变换，变向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 分别为 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$；并求这个变换在给出这些向量的坐标的那个基底下的矩阵：

1445. $\boldsymbol{a}_1=(2,3,5)$, $\boldsymbol{b}_1=(1,1,1)$,

$\boldsymbol{a}_2=(0,1,2)$, $\boldsymbol{b}_2=(1,1,-1)$,

$\boldsymbol{a}_3=(1,0,0)$; $\boldsymbol{b}_3=(2,1,2)$.

1446. $\boldsymbol{a}_1=(2,0,3)$, $\boldsymbol{b}_1=(1,2,-1)$,

$\boldsymbol{a}_2=(4,1,5)$, $\boldsymbol{b}_2=(4,5,-2)$,

$\boldsymbol{a}_3=(3,1,2)$; $\boldsymbol{b}_3=(1,-1,1)$.

1447. 令空间 $\mathbf{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 分别变线性无关的向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 为向量 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n$. 证明：这个变换在某基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵 $A_\varphi$ 可以从等式 $A_\varphi=BA^{-1}$ 求得，其中矩阵 $A$ 和 $B$ 的列分别由向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标所组成.

1448. 证明：三维空间的变换 $\varphi\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ 是线性变换，其中 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$. 并求这变换在标准正交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$——即给出上述坐标的那个基底——下的矩阵，以及在基底 $\boldsymbol{b}_1=(1,0,1)$, $\boldsymbol{b}_2=(2,0,-1)$, $\boldsymbol{b}_3=(1,1,0)$ 下的矩阵.

1449. 证明：用给定矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 左乘和右乘二阶方阵，是所有二阶方阵组成的空间的两个线性变换；并求这两个变换在由以下矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

组成的基底下的矩阵.

1450. 证明：微分是一个未知量的实系数的所有次数 $\leqslant n$ 的多项式空间的线性变换. 求这个变换在以下基底下的矩阵：

(a) $1, x, x^2, \cdots, x^n$;

(b) $1,\ x-c,\ \frac{(x-c)^2}{2!},\ \cdots,\ \frac{(x-c)^n}{n!}$, 其中 $c$ 是实数.

1451. 如果在基底$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$中交换两个向量$\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j$的位置,问线性变换的矩阵 $A$ 如何变化?

1452. 线性变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下有矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

求这个变换在以下基底下的矩阵:

(a) $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_4$;

(b) $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4$.

1453. 线性变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下有矩阵

$$\begin{pmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix}.$$

求这变换在基底 $\boldsymbol{f}_1=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵.

1454. 线性变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{a}_1=(8,\ -6,\ 7)$, $\boldsymbol{a}_2=(-16,\ 7,\ -13)$, $\boldsymbol{a}_3=(9,\ -3,\ 7)$ 下有矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & -18 & 15\\ -1 & -22 & 20\\ 1 & -25 & 22\end{pmatrix}.$$

求 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{b}_1=(1,\ -2,\ 1)$, $\boldsymbol{b}_2=(3,\ -1,\ 2)$, $\boldsymbol{b}_3=(2,\ 1,\ 2)$ 下的矩阵.

1455. 证明:同一个线性变换在两个基底下的矩阵相等当且仅当一个基底到另一个基底的转移矩阵和该变换在这两基底之一下的矩阵可交换.

1456. 证明：一维空间的任一线性变换 $\varphi$ 归结为以同一个数乘所有向量，亦即 $\varphi\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$，对任何向量 $\boldsymbol{x}$.

1457. 令变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{a}_1=(1, 2)$，$\boldsymbol{a}_2=(2, 3)$ 下有矩阵 $\begin{pmatrix}3 & 5\\4 & 3\end{pmatrix}$. 变换 $\psi$ 在基底 $\boldsymbol{b}_1=(3, 1)$，$\boldsymbol{b}_2=(4, 2)$ 下有矩阵 $\begin{pmatrix}4 & 6\\6 & 9\end{pmatrix}$.

求变换 $\varphi+\psi$ 在基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 下的矩阵.

1458. 变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{a}_1=(-3, 7)$，$\boldsymbol{a}_2=(1, -2)$ 下有矩阵 $\begin{pmatrix}2 & -1\\5 & -3\end{pmatrix}$，而变换 $\psi$ 在基底 $\boldsymbol{b}_1=(6, -7)$，$\boldsymbol{b}_2=(-5, 6)$ 下有矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{pmatrix}$.

求变换 $\varphi\psi$ 在给出以上所有向量坐标的那个基底下的矩阵.

1459. 在实系数的次数 $\leqslant n$ 的多项式空间中，令 $\varphi$ 是变每一个多项式为其导数的线性变换. 证明：$\varphi^{n+1}=0$.

1460. 在 $x$ 的实系数的所有多项式的无限维空间中，令 $\varphi$ 是微分线性变换，而 $\psi$ 是乘以 $x$ 的乘法. 证明：$\varphi\psi^n-\psi^n\varphi=n\psi^{n-1}$.

1461. 证明：$n$ 维空间的所有线性变换，关于加法和乘以纯量的乘法，组成一个向量空间. 求这空间的维数.

1462. 空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 称为**非奇异的**，如果它在某个(从而意味着在任何一个)基底下的矩阵是非奇异的，亦即 $|A_\varphi|\neq 0$. 证明：这个定义等价于下列定义中的每一个：

线性变换 $\varphi$ 是非奇异的，如果

(a) 从 $\varphi\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 推出 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；

(b) 在变换 $\varphi$ 下，空间的任一基底仍变为基底；

(c) 映射 $\varphi$ 是一对一的，亦即如果 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$，则 $\varphi\boldsymbol{x}_1\neq\varphi\boldsymbol{x}_2$；

(d) $\varphi$ 把空间映射为整个空间，亦即对任何 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}_n$，有 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}_n$，使得 $\varphi\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$；

(e) $\varphi$ 具有逆变换 $\psi$，亦即对任何 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}_n$，$\psi(\varphi\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$.

1463. 令 $\boldsymbol{x}$ 是线性变换 $\varphi$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，而 $f(t)$ 是多项式. 证明：该向量 $\boldsymbol{x}$ 是变换 $f(\varphi)$ 属于特征值 $f(\lambda)$ 的特征向量. 换句话说，从 $\varphi\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，可推出 $f(\varphi)\boldsymbol{x}=f(\lambda)\boldsymbol{x}$.

1464.* 令 $\boldsymbol{x}$ 是线性变换 $\varphi$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，而 $f(t)$ 是一个使得变换 $f(\varphi)$ 有意义的函数（如果 $\varphi$ 在某基底下有矩阵 $\boldsymbol{A}$，则在同一基底下，$f(\varphi)$ 用矩阵 $f(A)$ 来定义，并且可以证明 $f(\varphi)$ 与基底的选取无关）. 证明：该向量 $\boldsymbol{x}$ 是变换 $f(\varphi)$ 属于特征值 $f(\lambda)$ 的特征向量.

求在某基底下用下列矩阵所给出的线性变换的特征值和特征向量：

1465. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1466. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1467. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

1468. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

1469. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

1470. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

1471. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1472. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1473. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1474. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1475. 证明：线性变换的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

1476. 证明：有不相同特征值的任一方阵 $A$ 相似于对角形矩阵(在包含矩阵元素及其特征值的域上).

1477. 证明：如果空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 有 $n$ 个不相同的特征值，则与 $\varphi$ 可换的任何线性变换 $\psi$ 具有特征向量的基底，并且 $\varphi$ 的任一特征向量也是 $\psi$ 的特征向量.

1478. 证明：线性变换在某基底下的矩阵是对角形矩阵当且仅当基底由该变换的特征向量所组成.

下列线性变换的矩阵中的哪些可以用变到新基底的方法化为对角形．并求这个基底以及与之相对应的矩阵：

1479. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1480. $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1481. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1482. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1483. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1484.* 对 $n$ 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求非奇异矩阵 $T$，使得矩阵 $B=T^{-1}AT$ 是对角形矩阵，并求这个矩阵 $B$.

1485. 在向量 $\boldsymbol{x}$ 关于线性变换 $\varphi$ 的所有零化多项式（亦即具有性质 $f(\varphi)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的多项式 $f(\lambda)$）之中，次数最低且首项系数为 1 的多项式 $g_x(\lambda)$，称为向量 $\boldsymbol{x}$ 关于线性变换 $\varphi$ 的**最小多项式**.

类似地定义整个空间关于线性变换 $\varphi$ 的最小多项式 $g(\lambda)$. 证明：线性变换 $\varphi$ 的这个最小多项式 $g(\lambda)$，等于空间任一基底的各向量关于 $\varphi$ 的最小多项式的最小公倍式.

1486.* 求在次对角线上有数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 而在其余位置为零的矩阵 $A$ 相似于对角形矩阵的条件.

1487. 求出对实系数的次数 $\leqslant n$ 的多项式进行微分这一线性变换的特征值和特征向量.

1488. 令 $\varphi$ 是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换. 所有向量 $\varphi\boldsymbol{x}$ 的集合称为 $\boldsymbol{R}_n$ 在变换 $\varphi$ 下的象或 $\varphi$ 的值域，其中 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{R}_n$ 中任何向量. $\boldsymbol{R}_n$ 中使得 $\varphi\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 的集合，称为零在变换 $\varphi$ 下的完全原象，或者称为 $\varphi$ 的核. 证明：

(a) $\varphi$ 的值域是 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间，它的维数等于 $\varphi$ 的秩；

(b) $\varphi$ 的核是 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性子空间，它的维数等于 $\varphi$ 的零度，亦即等于 $n$ 与 $\varphi$ 的秩之差.

1489. 令 $\varphi$ 是线性变换；$\boldsymbol{L}$ 是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的子空间. 证明：在线性变换 $\varphi$ 下，

(a) 子空间 $\boldsymbol{L}$ 的象 $\varphi\boldsymbol{L}$ 仍是子空间；

(b) 子空间 $\boldsymbol{L}$ 的完全原象 $\varphi^{-1}\boldsymbol{L}$ 仍是子空间.

1490. 证明：对空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的非奇异线性变换 $\varphi$，任何线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 的

(a) 象 $\varphi\boldsymbol{L}$；

(b) 完全原象 $\varphi^{-1}\boldsymbol{L}$

的维数等于$L$的维数.

1491*. 用"$\dim \boldsymbol{L}$"表示线性子空间$\boldsymbol{L}$的维数,用"nullity$\varphi$"表示线性变换$\varphi$的零度. 证明:在变换$\varphi$下$\boldsymbol{R}_n$的子空间$\boldsymbol{L}$的象的维数和完全原象的维数满足以下不等式:

(a) $\dim \boldsymbol{L} - \text{nullity}\varphi \leqslant \dim \varphi \boldsymbol{L} \leqslant \dim \boldsymbol{L}$;

(b) $\dim \boldsymbol{L} \leqslant \dim \varphi^{-1} \boldsymbol{L} \leqslant \dim \boldsymbol{L} + \text{nullity}\varphi$.

1492*. 利用前题,证明关于两个$n$阶方阵$A$和$B$之积的秩的Sylvester不等式:

$$r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant \min(r_A, r_B)$$

(参看习题931).

1493. 证明:对空间$\boldsymbol{R}_n$的任何线性变换$\varphi$和$\psi$,

(a) $\text{rank}(\varphi+\psi) \leqslant \text{rank}\varphi + \text{rank}\psi$;

(b) $\text{nullity}(\varphi\psi) \leqslant \text{nullity}\varphi + \text{nullity}\psi$.

1494. 求在基底$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$下用矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

给定的线性变换$\varphi$的特征值和特征向量.

证明:用向量$\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$和$\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4$张成的子空间关于$\varphi$是不变子空间.

1495*. 证明:变换$\varphi$的属于一个特征值$\lambda_0$的线性无关的特征向量个数,不超过$\lambda_0$作为变换$\varphi$的特征多项式的根的重数.

1496. 证明:用变换$\varphi$的任何一组特征向量所张成的线性子空间,关于$\varphi$是不变的.

1497. 证明:线性变换$\varphi$的属于同一个特征值$\lambda_0$的所有特征向量的集合(以及零向量),是关于$\varphi$不变的线性子空间.

1498. 证明：空间的所有非零向量是线性变换 $\varphi$ 的特征向量当且仅当 $\varphi$ 是相似变换，亦即 $\varphi\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$，对任何向量 $\boldsymbol{x}$ 而言 $\alpha$ 是相同的.

1499. 证明：关于非奇异线性变换 $\varphi$ 不变的任何子空间 $\boldsymbol{L}$，关于逆变换 $\varphi^{-1}$ 也是不变的.

1500. 证明：关于线性变换 $\varphi$ 不变的线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 的

(a) 象 $\varphi\boldsymbol{L}$;

(b) 完全原象 $\varphi^{-1}\boldsymbol{L}$

关于 $\varphi$ 也是不变的.

1501. 求出一个未知量的实系数的次数 $\leqslant n$ 的多项式空间关于变换 $\varphi$ 不变的所有线性子空间，其中 $\varphi$ 是变任一多项式为其导数的变换.

1502. 证明：$n$ 维空间的线性变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 下的矩阵

(a) 是形式如下的分块半可裂矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \ A_1 \text{ 是 } k<n \text{ 阶方阵},$$

当且仅当由基底前 $k$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 所张成的线性子空间关于 $\varphi$ 是不变的;

(b) 是形式如下的分块半可裂矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}, \ A_1 \text{ 是 } k<n \text{ 阶方阵},$$

当且仅当由基底后 $n-k$ 个向量 $\boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 所张成的线性子空间关于 $\varphi$ 不变;

(c) 是形式如下的分块可裂矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \ A_1 \text{ 是 } k \text{ 阶方阵},$$

当且仅当由向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 张成的子空间以及由向量 $\boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$

张成的子空间关于$\varphi$都是不变的.

1503.* 令$n$维空间$\boldsymbol{R}_n$的线性变换$\varphi$在基底$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$下有对角形矩阵且对角线元素是不相同的. 求关于$\varphi$不变的所有线性子空间,并确定它们的个数.

1504. 求三维空间关于用矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所给出的线性变换不变的所有子空间.

1505. 求三维空间关于用矩阵

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

给出的两个线性变换同时不变的所有子空间.

1506. 证明: 复空间的任何两个可换的线性变换必有公共的特征向量.

1507. 证明: 对复空间$\boldsymbol{R}_n$的两两可换的线性变换的任何集(可以是无穷集),必存在该集所有变换的一个特征向量.

1508. 证明: 属于不同特征值的所有根向量是线性无关的.

线性变换在某基底下用下列矩阵给出, 求线性变换的特征值和根子空间:

1509. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

1510. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

1511. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

1512. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1513. 证明：复空间的线性变换在某基底下有对角形矩阵当且仅当它的所有根向量是特征向量.

1514. 证明：复空间完全由线性变换 $\varphi$ 的根向量所组成当且仅当这个变换的所有特征值都相等.

1515. 令 $\boldsymbol{R}$ 是定义于整个数直线并在其上有任意阶导数的所有实函数 $f(x)$ 所构成的无限维空间，具有通常的函数的加法以及函数与纯量的乘法，而 $\varphi$ 是变任一函数为其导数的变换.

(a) 求变换 $\varphi$ 的所有特征值和特征向量，

(b) 求 $\varphi$ 的所有的根子空间.

1516. 空间 $\boldsymbol{R}_n$ 称为关于线性变换 $\varphi$ 是**循环的**，如果 $\boldsymbol{R}_n$ 具有循环基底，亦即如下的基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$：

$$\varphi\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_{k+1} \qquad (k=1, 2, \cdots, n-1).$$

证明：如果 $\boldsymbol{R}_n$ 是关于 $\varphi$ 的循环空间，而 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是循环基底，则

(a) 变换 $\varphi$ 的最小多项式 $g(\lambda)$ 的次数为 $n$；

(b) 整个空间的最小多项式与向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的最小多项式相同；

(c) 如果 $\varphi\boldsymbol{a}_n = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$，则变换 $\varphi$ 的最小多项式是

$$g(\lambda) = \lambda^n - c_n\lambda^{n-1} - c_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - c_1.$$

1517. 证明：如果空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 的最小多项式 $g(\lambda)$ 的次数等于 $n$，且在研究 $\boldsymbol{R}_n$ 的那个域上，$g(\lambda)$ 是不可约多项式的幂，亦即在复空间的情形 $g(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$，则

(a) $\boldsymbol{R}_n$ 不能分解为两个关于 $\varphi$ 不变的子空间的直接和；

(b) $\boldsymbol{R}_n$ 关于 $\varphi$ 是循环的.

在循环基底下，变换 $\varphi$ 的矩阵有怎样的形式?

1518. 令空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 的最小多项式有形式 $(\lambda - \alpha)^n$. 证明：存在向量 $\boldsymbol{a}$，使得向量 $(\varphi - \alpha\varepsilon)^{n-1}\boldsymbol{a}, (\varphi - \alpha\varepsilon)^{n-2}\boldsymbol{a}, \cdots,$

$(\varphi-\alpha\varepsilon)\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ 组成空间的基底，其中 $\varepsilon$ 是恒等变换. 在这基底下变换 $\varphi$ 的矩阵有什么形式？

1519. 证明：复空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的关于线性变换 $\varphi$ 的任何不变子空间 $\boldsymbol{L}$，包含一条关于 $\varphi$ 不变的直线.

1520. 证明：实空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的关于线性变换 $\varphi$ 不变的且奇数维的任何子空间 $\boldsymbol{L}$，包含一条关于 $\varphi$ 不变的直线. 以例说明：对于偶数维的子空间，断言不真. 在怎样的条件下，$\boldsymbol{L}$ 包含一条直线，这直线上的所有点在变换 $\varphi$ 下保持不动？

1521. 证明：只包含一条关于线性变换 $\varphi$ 不变的直线的复空间，不能分解为关于 $\varphi$ 不变的两个非零子空间的直接和.

1522. 证明：复空间 $\boldsymbol{R}_n$ 关于给定的线性变换 $\varphi$ 可分解为(一个或一些)不变的线性子空间的直接和，其中每一个只包含一条不变直线，从而(按前题)不可再分解.

1523.* 令 $\varphi$ 是空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换，$g(\lambda)$ 是 $\varphi$ 的最小多项式. 证明：

(a) 如果 $g(\lambda)=h(\lambda)k(\lambda)$，且多项式 $h(\lambda)$ 和 $k(\lambda)$ 互素，则空间 $\boldsymbol{R}_n$ 是子空间 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的直接和，其中 $\boldsymbol{L}_1$ 由使 $h(\varphi)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 组成，$\boldsymbol{L}_2$ 由使 $k(\varphi)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 组成；

(b) 如果 $g(\lambda)=h_1(\lambda)h_2(\lambda)\cdots h_s(\lambda)$，且 $h_1(\lambda), h_2(\lambda), \cdots, h_s(\lambda)$ 两两互素，则空间 $\boldsymbol{R}_n$ 是子空间 $\boldsymbol{L}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 的直接和，其中 $\boldsymbol{L}_i$ 由使 $h_i(\varphi)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 所组成.

1524.* 线性变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 下用矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

给出. 求这个变换的最小多项式 $g(\lambda)$，并且，对应于 $g(\lambda)$ 之分解成形如 $(\lambda-\alpha)^k$ 的互素因子的分解，求空间分解成子空间直接和的

分解式.

1525. 如果线性变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 下用矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

给出,试解与前题同样的问题.

1526. 欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_n$(或酉空间)的线性变换 $\varphi$, 对 $\boldsymbol{R}_n$ 中的任何 $\boldsymbol{x}$ 用等式 $\varphi\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ 给出, 其中 $\boldsymbol{a}$ 是给定的非零向量. 求这个变换的最小多项式 $g(\lambda)$, 并且, 对应于 $g(\lambda)$ 分解成实系数的互素的不可约多项式的幂(在酉空间的情形, 形如 $\lambda-\alpha$ 的多项式的幂)的分解,把空间分解成直接和.

1527. 如果复空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 精确到数值因子只有一个特征向量,求 $\varphi$ 的矩阵的 Jordan 形.

1528. 证明: 线性变换 $\varphi$ 属于同一个特征值 $\lambda_0$ 的线性无关特征向量的个数, 等于 $\varphi$ 的矩阵的 Jordan 形中对角线元素是 $\lambda_0$ 的小块的个数.

1529.* 证明:使复向量空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 的矩阵有 Jordan 形的那个基底可以如下地构造出来:

(A) 如果不是 $\varphi$ 的所有特征值彼此相等, 又特征多项式有形式

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s} \quad (\lambda_i\neq\lambda_j, \text{当 } i\neq j),$$

则我们构造 $\boldsymbol{P}_i$ 的一个基底, 其中 $\boldsymbol{P}_i$ 是使得 $(\varphi-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$($\varepsilon$ 是恒等变换, $i=1, 2, \cdots, s$)的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 的子空间.

空间 $\boldsymbol{R}_n$ 是子空间 $\boldsymbol{P}_i$ 的直接和. $\boldsymbol{P}_i$ 关于 $\varphi$ 是不变子空间; $\varphi$ 在 $\boldsymbol{P}_i$ 上有一个特征值 $\lambda_i$, 并且对 $\boldsymbol{P}_i$ 中任何向量 $\boldsymbol{x}$, $(\varphi-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 在这个构造中, 可以取最小多项式 $g(\lambda)$ 代替特征多项式 $f(\lambda)$,这可能降低幂指数 $k_i$.

(*B*) 令 $\varphi$ 在 $\boldsymbol{R}_n$ 上有唯一的特征值 $\lambda_0$，且 $k$ 是使 $(\varphi-\lambda_0\varepsilon)^k=0$ 的最小正整数. 置 $\psi=\varphi-\lambda_0\varepsilon$. 使 $\psi^h\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的最小的 $h$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的高. 用 $\boldsymbol{R}_h$ 表示高 $\leqslant h(0\leqslant h\leqslant k)$ 的所有向量的子空间. $\boldsymbol{R}_0$ 只包含零向量；$\boldsymbol{R}_k$ 与整个空间重合.

我们构造 $\boldsymbol{R}_1$ 的一个基底，补充它使之成为 $\boldsymbol{R}_2$ 的一个基底，补充所得到的基底使之成为 $\boldsymbol{R}_3$ 的一个基底，等等，一直到构成 $\boldsymbol{R}_k$ 的一个基底(为方便起见，称这些基底为初始基底). 对 $\boldsymbol{R}_k$ 的初始基底的每一个高为 $k$ 的向量 $f$，我们构造初始向量为 $\boldsymbol{f}$ 的向量链

$$f,\ \psi f,\ \psi^2 f,\ \cdots,\ \psi^{k-1} f.$$

然后我们取 $\boldsymbol{R}_{k-2}$ 的任一基底(例如，初始基底)和所有所构造链的高为 $k-1$ 的向量. 这些向量合起来看是线性无关的. 用任何的向量(例如，$\boldsymbol{R}_{k-1}$ 的初始基底中的向量)补充它们成为 $\boldsymbol{R}_{k-1}$ 的基底. 对于补充而取的向量中的每一个 $f$(如果它们存在)构造新链:

$$f,\ \psi f,\ \psi^2 f,\ \cdots,\ \psi^{k-2} f,$$

如此等等.

令在某一步已经构造出一些链，其中高为 $h+1$ 的向量与 $\boldsymbol{R}_h$ 的任一基底(例如，初始基底)组成 $\boldsymbol{R}_{h+1}$ 的基底，$\boldsymbol{R}_{h-1}$ 的任一基底(例如，初始基底)的向量与所构造各链高为 $h$ 的向量放在一起是线性无关的. 用任何的向量(例如，$\boldsymbol{R}_h$ 初始基底中的向量)补充它们至于 $\boldsymbol{R}_h$ 的基底. 对于每一个补充而取的向量 $f$(如果此种向量存在)我们构造新链:

$$f,\ \psi f,\ \psi^2 f,\ \cdots,\ \psi^{h-1} f.$$

这样做，直到所有所构造的链的向量组成整个空间的基底. 一链接一链地写出向量，并在每链中向量取为相反次序(链的初始向量在该链的最后)，我们就得到所求的基底，变换 $\varphi$ 在它之下的矩阵有 Jordan 形.

(*C*) 在($A$)和($B$)中所构造的基底不是唯一确定的. 试证明: 与给定方阵 $A$ 相似的 Jordan 矩阵$A_J$(精确到Jordan小块的排列次序)的唯一性(这意味着, 给定的线性变换 $\varphi$ 的矩阵的 Jordan 形的唯一性). 亦即证明: $n$ 阶矩阵 $A$ 的 Jordan 形 $A_J$ 如下确定. 令 $k$ 是矩阵 $A_J$ 之对角线元素为数 $\lambda_0$ 的 Jordan 小块的最高阶数, $x_h$ 是 $h$ 阶($h=1, 2, \cdots, k$)的这种小块的个数, $B=A-\lambda_0 E$, $r_h$ 是矩阵 $B^h$ 的秩($h=0, 1, 2, \cdots, k, k+1$). 则数 $x_h$ 为下列公式决定:

$$x_h=r_{h-1}-2r_h+r_{h+1} \quad (h=1, 2, \cdots, k). \tag{$\alpha$}$$

**注** 公式($\alpha$)给出了不利用$\lambda$-矩阵初等因子理论求 Jordan 形 $A_J$ 的方法.

空间 $\mathbf{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下用矩阵 $A$ 给出. 求一基底 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 使在它之下这变换的矩阵有 Jordan形 $\boldsymbol{A}_J$, 并求出这个 Jordan 形(所求基底不唯一确定):

1530. $$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

1531. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1532. $$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

1533. $$A=\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1534. $$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1535. $$A=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1536. $A=B^2$，其中 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

是 $n$ 阶 Jordan 小块.

1537*. 空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 称为**对合变换**，如果 $\varphi^2=\varepsilon$，其中 $\varepsilon$ 是恒等变换. 说明对合变换的几何意义.

1538*. 空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 称为**幂等的**，如果 $\varphi^2=\varphi$. 说明幂等变换的几何意义.

1539. 举出三维空间线性变换 $\varphi$ 的两个例子，对于它们分别有：

($a$) 空间不是变换 $\varphi$ 的值域 $\boldsymbol{L}_1$ 和核 $\boldsymbol{L}_2$ 的直接和（定义在习题 1488 给出）;

($b$) 空间是 $\varphi$ 的值域 $\boldsymbol{L}_1$ 和核 $\boldsymbol{L}_2$ 的直接和，但 $\varphi$ 不是平行于 $\boldsymbol{L}_2$ 在 $\boldsymbol{L}_1$ 上的射影.

## § 19. 欧几里得向量空间和酉向量空间的线性变换

1540. 证明：从酉空间(或欧几里得空间)的线性变换 $\varphi$ 转变到共轭变换 $\varphi^*$ 这一运算具有下列性质:

($a$) $(\varphi^*)^*=\varphi$;

($b$) $(\varphi+\psi)^*=\varphi^*+\psi^*$;

($c$) $(\varphi\psi)^*=\psi^*\varphi^*$;

($d$) $(\alpha\varphi)^*=\bar{\alpha}\varphi^*$;

($e$) 如果 $\varphi$ 非奇异，则 $(\varphi^{-1})^*=(\varphi^*)^{-1}$.

1541. 令 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是平面的标准正交基底，线性变换 $\varphi$ 在基底

$f_1=e_2,\ f_2=e_1+e_2$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

求共轭变换 $\varphi^*$ 在同一基底 $f_1, f_2$ 下的矩阵.

1542. 欧几里得空间的线性变换 $\varphi$ 在由向量 $f_1=(1,\ 2,\ 1)$, $f_2=(1,1,2)$, $f_3=(1,1,0)$组成的基底下, 用矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -1\\ 2 & 7 & -3\end{pmatrix}$$

给出. 求共轭变换 $\varphi^*$ 在同一基底下的矩阵, 假定基底向量的坐标是在某标准正交基底下给出的.

1543. 在标准正交基底 $e_1, e_2, e_3$ 下, 求与变换 $\varphi$ 共轭的线性变换 $\varphi^*$ 的矩阵, 如果 $\varphi$ 变向量

$$a_1=(0,0,1),\ a_2=(0,1,1),\ a_3=(1,1,1)$$

分别为

$$b_1=(1,2,1),\ b_2=(3,1,2),\ b_3=(7,-1,4),$$

其中所有向量的坐标都在基底 $e_1, e_2, e_3$ 下给出.

1544. 令 $xOy$ 是平面上的直角坐标系, $\varphi$ 是平面之平行于第一和第三象限平分线在轴 $Ox$ 上的射影. 求共轭变换 $\varphi^*$.

1545*. 令 $R_n=L_1\dot{+}L_2$ 是欧几里得空间(或酉空间)分解成两个子空间直接和的分解式; $\varphi$ 是 $R_n$ 平行于 $L_2$ 在 $L_1$ 上的射影; $L_1^*$ 和 $L_2^*$ 分别是 $L_1$ 和 $L_2$ 的正交补; $\varphi^*$ 是 $\varphi$ 的共轭变换. 试证明: $R_n=L_1^*\dot{+}L_2^*$ 且 $\varphi^*$ 是 $R_n$ 平行于 $L_1^*$ 在 $L_2^*$ 上的射影.

1546. 证明: 如果酉空间(或欧几里得空间)的子空间 $L$ 关于线性变换 $\varphi$ 是不变的, 则正交补 $L^*$ 关于共轭变换 $\varphi^*$ 是不变的.

1547*. 证明: 酉空间 $R_n$ 的线性变换 $\varphi$ 有从零到 $n$ 任何维的

不变子空间.

1548*. 证明：对酉空间的任何线性变换 $\varphi$，存在标准正交基底，在它之下这变换的矩阵为三角形矩阵(Schur 定理).

1549. 线性变换 $\varphi$ 在某标准正交基底下用矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & -23 & 17 \\ 11 & -43 & 30 \\ 15 & -54 & 37 \end{pmatrix}$$

给定. 试写出关于 $\varphi$ 不变的平面的方程式.

1550. 如果同一个向量 $\boldsymbol{x}$ 既是线性变换 $\varphi$ 属于特征值 $\lambda_1$ 的特征向量，又是共轭变换 $\varphi^*$ 属于特征值 $\lambda_2$ 的特征向量，则

$$\lambda_1=\bar{\lambda}_2.$$

1551. 证明：如果酉空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则共轭数 $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n$ 是共轭变换 $\varphi^*$ 的特征值.

1552. 证明：在彼此共轭的线性变换的最小多项式中，对应的系数是互相共轭的.

1553*. 令酉空间(或欧几里得空间)的线性变换 $\varphi$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下有矩阵 $A$，而共轭变换 $\varphi^*$ 在对偶基(参看习题 1417) $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 下有矩阵 $B$. 证明：在酉空间中 $B=\bar{A}'$，在欧几里得空间中 $B=A'$.

1554*. 令纯量积$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$在某基底下用具有矩阵 $U$ 的双线性型 $f$ 给出(换句话说，矩阵 $U$ 是基底向量的 Gram 矩阵). 证明：在该基底下线性变换 $\varphi$ 的矩阵 $A$ 和共轭变换 $\varphi^*$ 的矩阵 $A_1$ 如下联系着：

(a) $A_1=U^{-1}A'U$，　　对欧几里得空间；

(b) $\bar{A}_1=U^{-1}A'U$，　　对酉空间.

令在某基底下，纯量积用双线性型 $f$ 给出，而线性变换 $\varphi$ 用矩阵 $A$ 给出. 求共轭变换 $\varphi^*$ 在该基底下的矩阵 $A_1$:

1555. $f = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 +$

$$+2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1556. $f = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$

$$+x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2;$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

令$U$是某基底的 Gram 矩阵，$A$是线性变换$\varphi$的矩阵．求共轭变换$\varphi^*$在该基底下的矩阵$A_1$：

1557.

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1558.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1559. 令$\varphi$是酉空间或欧几里得空间的线性变换．证明：$(e^{\varphi})^* = e^{\varphi^*}$（线性变换的函数的定义在习题 1464 中给出）．

1560. 证明：两个正交变换（或酉变换）的积是正交变换（或酉变换）．

1561. 证明：如果酉空间（或欧几里得空间）的线性变换$\varphi$保持所有向量的长，则它是酉变换（相应地，是正交变换）．

1562*. 令在酉空间（或欧几里得空间）中给定某一变换$\varphi$，在这个变换下，每一个向量$x$对应着唯一的向量$\varphi x$．证明：如果变

换$\varphi$保持纯量积，亦即对空间的任何向量$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$有$(\varphi\boldsymbol{x},\ \varphi\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$，则$\varphi$是线性的，从而是酉变换（相应地，是正交变换）. 用例子说明：保持所有向量的纯量平方，对$\varphi$的线性不是充分的.

1563. 令空间$\boldsymbol{R}_n$的向量的纯量乘法用某基底向量的Gram矩阵$U$给出. 求在该基底下用矩阵$A$所给出的线性变换$\varphi$是

(*a*) 欧几里得空间的正交变换，

(*b*) 酉空间的酉变换

的充分必要条件.

1564. 证明：如果欧几里得空间（或酉空间）的两个向量$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$有同一长度，则存在一个正交变换（或相应地，酉变换）$\varphi$，它把$\boldsymbol{x}$变成$\boldsymbol{y}$.

1565. 如果欧几里得空间（或酉空间）的两对向量$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$和$\boldsymbol{y}_1$、$\boldsymbol{y}_2$具有性质$|\boldsymbol{x}_1|=|\boldsymbol{y}_1|$，$|\boldsymbol{x}_2|=|\boldsymbol{y}_2|$且$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$间的角等于$\boldsymbol{y}_1$和$\boldsymbol{y}_2$间的角，则存在一个正交变换（相应地，酉变换）$\varphi$，使得

$$\varphi\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_1,\qquad \varphi\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_2.$$

1566*. 令给定欧几里得空间（或酉空间）的两个向量组$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$和$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_k$. 证明断言：存在使得$\varphi\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{y}_i (i=1, 2, \cdots, k)$的正交变换（相应地，酉变换）$\varphi$的必要且充分条件是两组向量的Gram矩阵相等：

$$((\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j))_1^k=((\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j))_1^k.$$

1567*. 令$\varphi$是酉空间（或欧几里得空间）$\boldsymbol{R}_n$的酉变换（或相应地，正交变换）. 证明：如果线性子空间$\boldsymbol{L}$关于$\varphi$不变，则$\boldsymbol{L}$的正交补$\boldsymbol{L}^*$关于$\varphi$也不变.

1568. 证明：酉空间的两个可换的酉变换具有公共的由特征向量组成的标准正交基底.

1569*. 证明：对酉空间的酉变换$\varphi$：

(*a*) 特征值的模等于1（从而意味着，酉矩阵的特征值的模，

特别是，实正交矩阵的特征值的模等于1)；

(b) 属于两个不同的特征值的特征向量是正交的；

(c) 如果在某基底下，变换 $\varphi$ 的矩阵 $A$ 是实的，且属于复特征值 $\alpha+\beta i\,(\beta\neq 0)$ 的特征向量表为形式 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}i$，其中向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 有实坐标(分量)，则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 正交并有同样的长度，而且

$$\varphi\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{y};\qquad \varphi\boldsymbol{y}=\beta\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y};\tag{1}$$

(d) 欧几里得空间的正交变换总具有一维或者二维的不变子空间.

1570* 证明：

(a) 对酉空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何酉变换 $\varphi$，存在由变换 $\varphi$ 的特征向量组成的标准正交基底，在这基底下，$\varphi$ 的矩阵是对角形矩阵，且对角线元素的模等于1. 由此推出酉矩阵的什么性质？

(b) 对欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何正交变换 $\varphi$，存在标准正交基底，在这基底下 $\varphi$ 的矩阵有标准形式：其中在主对角线上是形如

$$\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma\\ \sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}\qquad(\gamma\neq k\pi)$$

的二阶小块和形如 $(\pm 1)$ 的一阶小块.

这两种类型小块中的某一种可能不出现. 所有其余的元素等于零. 变换的几何意义是什么？由此推出实正交矩阵的什么性质？

对在标准正交基底下用矩阵 $A$ 所给出的正交变换 $\varphi$，求一个标准正交基底，使得在这基底下这个变换的矩阵 $B$ 有习题1570中所指出的标准形式. 求这个标准形式(所求基底不唯一确定).

1571.
$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

1572.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1573.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} & \frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 $A$ 的标准形 $B$ 以及使得 $B=Q^{-1}AQ$ 成立的正交矩阵 $Q$:

1574.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1575.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1576.

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

1577.

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

1578. 对给定的酉矩阵

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4+3i & 4i & -6-2i\\ -4i & 4-3i & -2-6i\\ 6+2i & -2-6i & 1\end{pmatrix},$$

求对角形矩阵 $B$ 和酉矩阵 $Q$ 使得

$$B=Q^{-1}AQ.$$

1579. 证明：自共轭变换的实系数线性组合(特别地，两个自共轭变换的和)是自共轭变换.

1580. 证明：两个自共轭变换 $\varphi$ 和 $\psi$ 的积 $\varphi\psi$ 是自共轭的当且仅当 $\varphi$ 和 $\psi$ 是可交换的.

1581. 证明：如果 $\varphi$ 和 $\psi$ 是自共轭变换，则变换

$$\varphi\psi+\psi\varphi \quad 和 \quad i(\varphi\psi-\psi\varphi)$$

也是自共轭的.

1582. 证明：欧几里得空间(或酉空间) $\boldsymbol{R}_n$ 的平行于子空间

$L_2$ 关于子空间 $L_1$ 的反射 $\varphi$ 是自共轭线性变换当且仅当 $L_1$ 和 $L_2$ 是正交的.

1583. 证明：欧几里得空间（或酉空间）$R_n$ 的平行于子空间 $L_2$ 在子空间 $L_1$ 上的射影 $\varphi$ 是自共轭线性变换当且仅当 $L_1$ 和 $L_2$ 是正交的.

1584. 证明：如果酉空间（或欧几里得空间）$R_n$ 的线性变换 $\varphi$ 具有下列三个性质中的任何两个：

(1) $\varphi$ 是自共轭变换；

(2) $\varphi$ 是酉变换（或相应地，正交变换）；

(3) $\varphi$ 是对合变换，亦即 $\varphi^2=\varepsilon$（$\varepsilon$ 是恒等变换），

则它也具有第三个性质. 求出具有所有这些性质的变换的一切类型.

线性变换在某标准正交基底下用矩阵 $A$ 给定，求由特征向量组成的标准正交基底以及在这基底下线性变换的矩阵 $B$（所求基底不唯一确定）：

1585.
$$A=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

1586.
$$A=\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

1587.
$$A=\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

对给定的矩阵 $A$，求对角矩阵 $B$ 和酉矩阵 $C$ 使得 $B=C^{-1}AC$：

1588.
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}.$$

1589. $$A=\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}.$$

1590*. 我们考察所有 $n$ 阶复方阵的 $n^2$ 维空间，它具有通常的矩阵加法以及矩阵与数的乘法运算，如果两个矩阵 $A=(a_{ij})_1^n$ 和 $B=(b_{ij})_1^n$ 的纯量积由等式

$$(AB)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ij}$$

给定，则变这一空间为酉空间。

证明：

(a) 用同一个矩阵 $C$ 左乘所有矩阵的乘法是一个线性变换；

(b) 酉矩阵作为所论空间的向量有长 $\sqrt{n}$；

(c) 用共轭转置矩阵 $C$ 和 $\bar{C}'$ 左乘所有矩阵的乘法，引出互相共轭的两个变换；

(d) 左乘以酉矩阵 $C$ 引出一个酉变换；

(e) 乘以一个 Hermite 矩阵引出一个自共轭变换；

(f) 乘以一个斜 Hermite 矩阵引出一个斜对称变换.

1591. 令空间 $\boldsymbol{R}_n$ 中向量的纯量乘法用某基底的 Gram 矩阵 $U$ 给出. 求在该基底下用矩阵 $A$ 给出的线性变换 $\varphi$ 是自共轭变换的充分必要条件. 分 (a) 欧几里得空间和 (b) 酉空间两种情形讨论.

1592*. 证明：酉空间(或欧几里得空间) $\boldsymbol{R}_n$ 的两个自共轭线性变换 $\varphi$ 和 $\psi$ 有公共的由两变换的特征向量组成的标准正交基底当且仅当这两个变换是可换的. 由此推出二次型和二次曲面的何种性质?

1593. 令 $\boldsymbol{R}$ 是 $n^2$ 维的欧几里得空间：它的向量是所有 $n$ 阶实矩阵，具有通常的矩阵的加法和矩阵与数的乘法运算，而矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 的纯量积由等式

$$(AB)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$$

定义. 且设$P$和$Q$是$n$阶实对称矩阵.

证明: 线性变换

$$\varphi X=PX \quad 和 \quad \psi X=XQ$$

($X$是空间$R$中任何矩阵)是空间$R$的可换自共轭变换. 求变换$\varphi,\psi$的公共的由特征向量组成的标准正交基底与矩阵$P$, $Q$的特征向量组成的标准正交基底之间的联系.

1594. $\varphi$是酉空间(或欧几里得空间)$\boldsymbol{R}_n$的自共轭线性变换, 如果对$\boldsymbol{R}_n$中任何向量$\boldsymbol{x}\neq 0$有$(\varphi\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$, 则$\varphi$称为正定的, 如果$(\varphi\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 则$\varphi$称为非负的.

证明: 自共轭变换$\varphi$是正定的(或非负的)当且仅当它所有的特征值是正的(相应地, 非负的). 证明: 对任何线性变换$\varphi$(不仅是对自共轭变换), 从$(\varphi\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$(或$\geqslant 0$)推出$\varphi$的所有特征值是正的(相应地, 是非负的). 举例说明, 对非自共轭线性变换, 逆命题可能不真.

1595*. 证明: 如果$\varphi=\psi\chi$或者$\varphi=\chi\psi$, 其中$\varphi$和$\psi$是具有正特征值的自共轭线性变换, 而$\chi$是酉变换, 则$\varphi=\psi$且$\chi$是恒等变换(参看习题1276($c$)).

1596*. 证明: 酉空间(或欧几里得空间)的任何非奇异线性变换$\varphi$可以表为$\varphi=\psi_1\chi_1$, 也可表为$\varphi=\chi_2\psi_2$的形式, 其中$\psi_1,\psi_2$是具正特征值的自共轭变换, 而$\chi_1,\chi_2$是酉变换(相应地, 正交变换), 并且以上两种表示都是唯一的.

1597. 为什么等式

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

与上题中所指出的表示法的唯一性并不矛盾.

把下列矩阵表示为具正特征值的对称矩阵与正交矩阵之积的形式：

1598.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1599.
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1600.
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1601. 证明：自共轭线性变换 $\varphi$ 是正定的当且仅当它的特征多项式 $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$ 的系数全都不为零且有交错符号；是非负的(亦即有非负的特征值)当且仅当系数 $c_0 = 1$, $c_1$, $c_2$, $\cdots$, $c_k$ 不为零且有交错符号，而 $c_{k+1}, \cdots, c_n$ 等于零. 此处 $k$ 是从 0 到 $n$ 的任一数.

1602*. 证明：如果 $\varphi$ 和 $\psi$ 是自共轭变换且 $\varphi$ 是正定的，则变换 $\varphi\psi$ 的特征值是实的.

1603*. 证明：如果 $\varphi$ 和 $\psi$ 是具非负特征值的自共轭变换，并且其中之一是非奇异的，则变换 $\varphi\psi$ 的特征值是实的且非负.

1604. 证明：两个或者多个非负自共轭变换(参看习题 1594)的和也是非负自共轭变换.

1605*. 证明：秩为 $r$ 的非负自共轭变换是 $r$ 个秩为 1 的非负自共轭变换的和.

1606*. 证明：酉空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的秩为 1 的线性变换 $\varphi$ 是非负自共轭变换，当且仅当在任何标准正交基底下它的矩阵能表为形式 $\bar{X}'X$，其中 $X$ 是 $n$ 个数的行.

1607*. 证明：如果矩阵 $A = (a_{ij})_1^n$ 和 $B = (b_{ij})_1^n$ 是 Hermite 的且非负的(亦即有非负的特征值)，则矩阵 $C = (c_{ij})_1^n$，其中 $c_{ij} =$

$a_{ij}b_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 也是 Hermite 的且非负的(与习题 1220 比较).

1608. 欧几里得空间(或酉空间)$\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 称为斜对称的，如果 $\varphi^*=-\varphi$，其中 $\varphi^*$ 是 $\varphi$ 的共轭变换. 证明：

(*a*) 欧几里得空间的线性变换 $\varphi$ 是斜对称的必要且充分条件是它的矩阵 $A$ 在任何标准正交基底下是斜对称的，亦即 $A'=-A$；

(*b*) 酉空间的线性变换 $\varphi$ 是斜对称的必要且充分条件是它的矩阵 $A$ 在任何标准正交基底下是斜 Hermite 矩阵，亦即 $\bar{A}'=-A$.

1609*. 证明：如果欧几里得空间(或酉空间)的线性子空间 $\boldsymbol{L}$ 关于斜对称变换 $\varphi$ 不变，则 $\boldsymbol{L}$ 的正交补 $\boldsymbol{L}^*$ 关于 $\varphi$ 也是不变的.

1610*. 证明：对于酉空间的斜对称变换 $\varphi$，

(*a*) 特征值是纯虚数(从而，复的斜 Hermite 矩阵的特征值，特别是实斜对称矩阵的特征值是纯虚数)；

(*b*) 属于两个不同的特征值的特征向量是正交的；

(*c*) 如果变换 $\varphi$ 在一个标准正交基底下的矩阵 $A$ 是实的，且属于值 $\beta i\neq 0$ 的特征向量被表为形式 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}i$，其中向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 有实坐标，则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 正交且有同样长度，并且

$$\varphi\boldsymbol{x}=-\beta\boldsymbol{y}, \qquad \varphi\boldsymbol{y}=\beta\boldsymbol{x}; \tag{1}$$

(*d*) 欧几里得空间的斜对称变换总具有一维或二维不变子空间.

1611*. 证明：

(*a*) 对酉空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何斜对称变换 $\varphi$，存在由变换 $\varphi$ 的特征向量组成的标准正交基底. 在这基底下 $\varphi$ 的矩阵是对角形矩阵，对角线上是纯虚元素(这些元素中的某些可能等于零). 由此推出复的斜 Hermite 矩阵的什么性质?

(*b*) 对欧几里得空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何斜对称变换 $\varphi$，存在标准正交基底，在这基底下 $\varphi$ 的矩阵有下列标准形式：沿主对角线上是

形如

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

的二阶小块(其中 $\beta\neq 0$)，和一阶零小块(这两种小块中有一种可能不出现). 变换的几何意义是什么？由此推出实斜对称矩阵的什么性质？

1612. 证明：如果 $\varphi$ 是酉空间的自共轭变换，则变换 $\psi=i\varphi$ 是斜对称的. 反之，如果 $\varphi$ 是斜对称的，则 $\psi=i\varphi$ 是自共轭变换.

1613. 证明：如果 $\varphi$ 是酉空间的自共轭变换，则变换

$$\psi=(\varphi-i\varepsilon)^{-1}(\varphi+i\varepsilon)$$

存在且是酉变换，其中 $\varepsilon$ 是恒等变换.

1614*. 证明：酉空间的斜对称变换和酉变换(相对应地，欧几里得空间的斜对称变换和正交变换)以下列方式联系着：

如果在等式

$$\psi=(\varepsilon-\varphi)(\varepsilon+\varphi)^{-1} \tag{1}$$

(其中 $\varepsilon$ 是恒等变换)中，$\varphi$ 是斜对称变换，则 $\psi$ 是没有等于$-1$的特征值的酉变换. 反之，如果在该等式(1)中，$\varphi$ 是没有特征值$-1$的酉变换，则 $\psi$ 是斜对称变换. 等式(1)确定了所有斜对称变换到所有没有特征值$-1$的酉变换的互逆的一对一映射. 在欧几里得空间的斜对称和正交变换之间有类似的联系. 由此推出矩阵的什么性质？

1615. 试阐明：前题的等式(1)确定出

第一，所有非奇异斜对称变换和所有没有特征值$\pm1$的酉变换(相应地，正交变换)之间的一一对应；

第二，所有奇异的斜对称变换和所有有特征值$+1$但没有特征值$-1$的酉变换(相应地，正交变换)之间的一一对应.

1616. 证明：如果 $\varphi$ 是酉空间(或欧几里得空间)的斜对称变

换，则变换 $e^{\varphi}$ 是酉变换（相应地，正交变换）. 由此推出矩阵的什么性质？

1617*. 证明：函数 $e^{\varphi}$ 引出酉空间（或欧几里得空间）的所有自共轭变换到所有正定变换（亦即具正特征值的自共轭变换）上的一个一对一映射.

1618. 酉空间（或欧几里得空间）的线性变换 $\varphi$ 称为正规变换，如果它与其共轭变换 $\varphi^*$ 可换. 验证：自共轭变换、斜对称变换和酉变换（或正交变换）都是正规变换.

1619. 证明：酉空间（或欧几里得空间）的正规变换是自共轭的当且仅当它所有的特征值（相应地，它的特征方程的所有根）是实的.

1620. 证明：酉空间（或欧几里得空间）的正规变换是酉变换（相应地，正交变换）当且仅当它所有的特征值（相应地，它的特征方程的所有根）的模等于 1.

1621. 证明：酉空间（或欧几里得空间）的正规变换是斜对称变换当且仅当它所有的特征值（相应地，它的特征方程的所有根）是纯虚数.

1622. 证明：酉空间的线性变换 $\varphi$ 是正规的当且仅当 $\varphi=\psi\chi$，其中 $\psi$ 是自共轭变换，$\chi$ 是酉变换，且彼此可交换.

1623. 证明：

(a) 每一个线性变换 $\varphi$ 可唯一地表为形式 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$，其中 $\varphi_1$ 是自共轭变换，$\varphi_2$ 是斜对称变换；

(b) 变换 $\varphi$ 是正规的必要且充分条件是上面指出的表示中的变换 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 是可换的.

1624. 证明：

(a) 酉空间的每一个线性变换 $\varphi$ 可唯一地表为形式 $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$，其中 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 是自共轭变换；

(*b*) 变换 $\varphi$ 是正规的必要且充分条件是上面所指出的表示中的变换 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 是可换的.

1625*. 证明：对酉空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的两两可换的正规变换的任一(有限或无限)集合，存在一个标准正交基底，其向量是该集所有变换的特征向量.

1626. 证明：对任何自然数 $k$，可以在正规变换范围内求出酉空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的任何正规变换 $\varphi$ 的 $k$ 次根. 求使 $\psi^k=\varphi$ 的不同的正规变换 $\psi$ 的数目.

1627*. 证明：如果 $\boldsymbol{x}$ 是酉空间(或欧几里得空间)的正规变换 $\varphi$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{x}$ 是共轭变换 $\varphi^*$ 的属于共轭特征值 $\bar{\lambda}$(相应地，$\lambda$)的特征向量.

1628*. 证明：正规变换的属于两个不同特征值的特征向量是正交的.

1629*. 令 $\boldsymbol{e}$ 是正规变换 $\varphi$ 的特征向量. 证明：由空间的所有正交于 $\boldsymbol{e}$ 的向量所组成的子空间 $L$ 关于 $\varphi$ 是不变的.

1630*. 证明：为使酉空间的线性变换 $\varphi$ 是正规的，必要且充分的条件是 $\varphi$ 的每一个特征向量也是 $\varphi^*$ 的特征向量.

1631*. 证明：酉空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的关于正规变换 $\varphi$ 不变的任何一个子空间 $L$，具有由变换 $\varphi$ 的特征向量所组成的标准正交基底.

1632*. 称酉空间(或欧几里得空间) $\boldsymbol{R}_n$ 的线性变换 $\varphi$ 具有正规性，如果 $\varphi$ 的每一个不变子空间 $\boldsymbol{L}$ 的正交补 $\boldsymbol{L}^*$ 关于 $\varphi$ 也不变. 证明断言：酉空间(或欧几里得空间)的线性变换 $\varphi$ 是正规变换的必要且充分条件是 $\varphi$ 具有正规性.

1633*. 证明：酉空间(或欧几里得空间)的线性变换 $\varphi$ 是正规变换的必要且充分条件是关于 $\varphi$ 不变的每一个子空间关于 $\varphi^*$ 也不变.

# 增　补

## § 20. 群

1634. 确定下列集合中的每一个，关于所指出的元素运算是否组成群：

(1) 整数，关于加法；

(2) 偶数，关于加法；

(3) 已给自然数 $n$ 的倍数，关于加法；

(4) 已给实数 $a$ 的整指数次幂，其中 $a\neq 0, \pm 1$，关于乘法；

(5) 非负整数，关于加法；

(6) 奇整数，关于加法；

(7) 整数，关于减法；

(8) 有理数，关于加法；

(9) 有理数，关于乘法；

(10) 非零有理数，关于乘法；

(11) 正有理数，关于乘法；

(12) 正有理数，关于除法；

(13) 二进制有理数(亦即其分母是 2 的非负整数次幂的有理数)，关于加法；

(14) 所有如下的有理数：分母等于取自已给集合 $M$(有限或无限集合）的素数的非负整数次幂（幂指数中只是有限多个不为零)的乘积，关于加法；

(15) 1 的 $n$ 次根(实根和复根都算在内)，关于乘法；

(16) 1 的所有正整数次根，关于乘法；

(17) 实元素的 $n$ 阶矩阵，关于乘法；

(18) 非奇异的 $n$ 阶实元素矩阵，关于乘法；

(19) $n$ 阶整数矩阵，关于乘法；

(20) 行列式等于 1 的 $n$ 阶整数矩阵，关于乘法；

(21) 行列式等于 $\pm 1$ 的 $n$ 阶整数矩阵，关于乘法；

(22) $n$ 阶实元素矩阵，关于加法；

(23) 数 $1, 2, \cdots, n$ 的置换，关于乘法；

(24) 数 $1, 2, \cdots, n$ 的偶置换，关于乘法；

(25) 数 $1, 2, \cdots, n$ 的奇置换，关于乘法；

(26) 正整数集合 $N = \{1, 2, \cdots\}$ 到自身上的一对一映射，其每一个映射只使有限多个数变动，关于映射的乘法，假定接连完成映射 $s$ 和 $t$ 之后所得的映射为 $s$ 和 $t$ 的积 $st$；

(27) 集合 $M$ 的变换，亦即该集到自身上的一对一映射，关于变换的乘法：所谓变换 $s$ 和 $t$ 的乘积指的是变换 $st$，后者是相继完成变换 $s$ 和 $t$ 所得到的变换；

(28) $n$ 维线性空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的向量，关于加法；

(29) 三维空间 $\boldsymbol{R}$ 的平移，如果取平移 $s$ 和 $t$ 接连的平移为它们的积；

(30) 三维空间 $\boldsymbol{R}$ 的关于一给定点 $O$ 的旋转，我们取旋转 $s$ 和 $t$ 的接连完成作为二者的乘积；

(31) 三维空间 $\boldsymbol{R}$ 的所有运动，我们把运动 $s$ 和 $t$ 的相继完成所得到的运动取为二者的乘积；

(32) 正实数，其运算定义为 $a*b = a^b$；

(33) 正实数，运算定义为 $a*b = a^2b^2$；

(34) 未知元 $x$ 的次数 $\leqslant n$ 的实多项式(包括零次在内)，关于加法；

(35) 未知元 $x$ 的 $n$ 次实多项式，关于加法；

(36) 未知元 $x$ 的任意次的实多项式(包括零次)，关于加法.

1635. 证明：如果$G$是有限集合，其中定义了可结合的代数运算，并且每一个方程

$$ax=b, \qquad ya=b$$

对$G$中的任意$a, b$，在$G$中至多有一个解，则$G$是一个群。

1636. 证明：如果对群$G$中的任何元素$a$，有$a^2=e$，则它是一个 Abel 群。

1637*. 证明：1 的$n$次根群是唯一的一个数值元素的$n$阶乘法群。

1638*. 求出$(a)3$，$(b)4$，$(c)6$ 阶的所有群(在同构范围内)。写出这些群的乘法表并以置换群的形式表示它们。

1639*. 证明：五种正多面体中的每一种，围绕其中心与自身重合的旋转组成一个群，如果我们把两个旋转的相继完成作为二者的乘积(合成)。求这些群的阶。

1640. 证明：习题 1634 中群(1)到(4)是同构的。

1641. 证明：

$(a)$ 所有无限循环群彼此同构；

$(b)$ 所有$n$阶有限循环群是彼此同构的($n$是已给定的)。

1642. 证明：

$(a)$ 正实数的乘法群同构于实数的加法群；

$(b)$ 正有理数的乘法群与有理数的加法群不同构。

1643*. 证明：

$(a)$ 任一个$n$阶有限群同构于某个$n$个元素的置换群；

$(b)$ 任一群都同构于下述群：群的元素集合到自身上的某些一对一映射所成的群。

1644. 证明：对群$G$中的任何元素$a, b, c$，

$(a)$ 元素$ab$和$ba$是同阶的；

$(b)$ 元素$abc, bca$和$cab$是同阶的。

1645. 证明：如果 $e$ 是群 $G$ 的单位元，而 $a$ 是 $G$ 的一个 $n$ 阶元素，则 $a^k=e$ 当且仅当 $k$ 可被 $n$ 整除.

1646. 求整数加法群的所有生成元素.

1647. 令 $G=\{a\}$ 是一个 $n$ 阶循环群，又 $b=a^k$. 证明：

(a) 元素 $b$ 是群 $G$ 的生成元当且仅当 $n$ 和 $k$ 互素；

(b) 元素 $b$ 的阶等于 $\frac{n}{d}$，其中 $d$ 是 $n$ 和 $k$ 的最大公因子；

(c) 如果 $n$ 和 $k$ 互素，则在 $G$ 中根 $\sqrt[k]{a}$ 存在，亦即 $a$ 是 $G$ 中某元素的 $k$ 次幂，反之亦然；

(d) 在奇阶群中所有元素是平方.

1648* 证明下列断言：

(a) 如果群 $G$ 的元素 $a$ 和 $b$ 是可换的，亦即

$$ab=ba, \tag{1}$$

并且 $a$ 和 $b$ 有有限的互素的阶 $r$ 和 $s$，则它们的乘积 $ab$ 是 $rs$ 阶的；

(b) 如果群 $G$ 的元素 $a$ 和 $b$ 是可换的，有有限的阶 $r$ 和 $s$，并且它们的循环子群的交只包含单位元素 $e$，亦即

$$\{a\}\cap\{b\}=\{e\}, \tag{2}$$

则乘积 $ab$ 的阶等于 $r$ 和 $s$ 的最小公倍数. 用例子证明：为使这一断言成立，条件(1)和(2)分开来讲都不是充分的，且条件(1)不是条件(2)的推论，甚至对元素 $a$ 和 $b$ 的阶互素时也如此；

(c) 如果元素 $a$ 和 $b$ 的阶 $r$ 和 $s$ 是互素的，则条件(2)成立；

(d) 用例子证明：如果没有条件(2)，乘积 $ab$ 的阶不能只由因子 $a$ 和 $b$ 的阶确定.

1649. 习题 1634 中的哪些群是其他群的子群？

1650. 证明：

(a) 如果 $H$ 是群 $G$ 的元素的有限集，并且 $H$ 中的任意两个元素的积仍在 $H$ 中，则 $H$ 是 $G$ 的子群；

(b) 如果群$G$中的集$H$的所有元素有有限阶，并且$H$的任意两个元素的积仍在$H$中，则$H$是$G$的子群.

1651. 在至少包含一个奇置换的任一置换群中证明：

(a) 偶置换的个数等于奇置换的个数；

(b) 偶置换形成一个正规子群；

(c) $n$个元素（其中$n>2$）的所有单纯置换群包含于交代群$A_n$之中（一个群若除自身和单位元子群外不包含任何其他的正规子群，则称之为**单纯群**）.

1652. 证明：任一无限群有无穷多个子群.

1653. 在同构的范围内，求出所有如下所述的群：这些群中的每一个同构于它的任一非单位元子群.

1654.

(a) 求 6 阶循环群的所有子群；

(b) 求 24 阶循环群的所有子群；

(c) 求四元群（参看习题 1638）的所有子群；

(d) 求对称群$S_3$的所有子群；

(e) 群$S_3$的哪些子群是正规子群？

(f) 证明：四次交代群$A_4$没有 6 阶的子群. 从而，$n$阶群$G$，对某一整除$n$的$k$，可能没有任何$k$阶的子群.

1655. 有一个 8 阶群$G$，它的所有元素除单位元$e$外都是 2 阶的，试求$G$的所有子群.

1656. 令$G=\{a\}$是一个$n$阶有限循环群，证明下列断言：

(a) $G$的任一子群的阶，能整除群$G$的阶$n$；

(b) 对于数$n$的任一因子$d$，存在群$G$的唯一的一个阶为$d$的子群$H$；

(c) $d$阶的子群$H$包含着$G$中所有的$d$阶元素，这些元素都是它的生成元，特别地，$H=\{a^{\frac{n}{d}}\}$.

1657* 求准素循环群(亦即 $p^k$ 阶的循环群 $G=\{a\}$，其中 $p$ 是素数)的所有子群.

1658* 证明下列各命题:

(*a*) 对称群 $S_n(n>1)$ 是由所有对换$(i,j)$的集生成的;

(*b*) 对称群 $S_n(n>1)$ 是由对换$(1,2)$, $(1,3)$, …, $(1,n)$ 生成的.

(*c*) 交代群 $A_n(n>2)$ 是由所有三元轮换$(i,j,k)$ 的集生成的;

(*d*) 交代群 $A_n(n>2)$ 是由三元轮换$(1,2,3)$, $(1,2,4)$, …, $(1,2,n)$生成的.

1659.

(*a*) 求整数加法群关于下述子群的陪集，这子群的元素是给定自然数 $n$ 的倍数;

(*b*) 求实数加法群关于整数子群的陪集;

(*c*) 求复数加法群关于 Gauss 整数子群(Gauss 整数即是数 $a+bi$, 其中 $a$ 和 $b$ 是整数)的陪集;

(*d*) 求平面向量的加法群(各向量均由坐标原点出发)关于横轴 $Ox$ 上向量的子群的陪集;

(*e*) 求不为零的复数所成的乘法群关于绝对值等于 1 的数的子群的陪集;

(*f*) 求不为零的复数所成的乘法群关于正实数子群的陪集;

(*g*) 求不为零的复数所成的乘法群关于实数子群的陪集;

(*h*) 求对称群 $S_n$ 关于使数 $n$ 固定的置换所成的子群的陪集.

1660* 证明:

(*a*) $2k$ 阶有限群 $G$ 的 $k$ 阶子群 $H$，包含 $G$ 中所有元素的平方;

(*b*) 任一群 $G$ 的指数为 2 的子群 $H$，包含 $G$ 中所有元素的

平方.

1661* 证明：当 $n>1$ 时，交代群 $A_n$ 是对称群 $S_n$ 中唯一的指数为 2 的子群(也就是说，该子群包含所有元素的一半)．试举出一有限群的例子，使它包含数个指数为 2 的子群.

1662* 证明：

(a) 四面体群同构于四元素的偶置换群;

(b) 立方体群和八面体群都同构于四元素所有置换的群;

(c) 十二面体群和二十面体群都同构于五元素的偶置换群.

关于多面体群的定义参看习题 1639.

1663. 证明：指数为 2 的任一子群是正规子群.

1664. 证明：群 $G$ 的与 $G$ 的所有元素都可换的元素的全体所成之集 Z，是一个正规子群(称为群 $G$ 的中心).

1665. 元素 $aba^{-1}b^{-1}$ 称为 $G$ 中元素 $a$ 和 $b$ 的换位子．证明：所有的换位子及其乘积(有限多个因子的乘积)形成 $G$ 的一个正规子群 $K$(称为该群的换位).

1666. 证明：在三维空间的所有运动的群中，若 $a$ 是绕 $P$ 点的旋转，运动 $x$ 把 $P$ 点变为 $Q$ 点，则元素 $x^{-1}ax$(它称为 $a$ 的共轭元素)是绕 $Q$ 点的旋转.

1667. 证明：置换 $x^{-1}ax$(在置换群中它称为置换 $a$ 的共轭元素)可以如下得到，就是：在置换 $a$ 分解成独立轮换的分解式中，把置换 $x$ 用到所有的数上去.

1668* 证明：

(a) 四元群 $V$(习题 1638)是对称群 $S_4$ 的正规子群;

(b) 商群 $S_4/V$ 同构于对称群 $S_3$.

1669* 利用习题 1667，求对称群 $S_n$ 中与给定置换 $s$ 可换的置换的个数.

1670* 证明：如果群 $G$ 的两个正规子群 $H_1$ 和 $H_2$ 的交只包含

单位元$e$，则任一元素$h_1 \in H_1$与任一元素$h_2 \in H_2$可换.

1671. 证明：

($a$) 群$G$中那些与给定元素$a$可换的元素形成$G$的一个子群$N(a)$（称为$a$在$G$内的正规化子），它包含循环群$\{a\}$作为正规子群；

($b$) 群$G$中与$a$共轭的元素数等于正规化子$N(a)$在$G$内的指数.

1672. 证明：

($a$) 群$G$中与给定子群$H$(但不一定与$H$中各元素)可换的元素形成$G$的一个子群$N(H)$(称为子群$H$在$G$内的正规化子)，它包含子群$H$作为正规子群；

($b$) 群$G$中与$H$共轭的子群数等于正规化子$N(H)$在$G$内的指数.

1673*. 证明：

($a$) 群$G$中与给定元素共轭的元素数必除尽$G$的阶；

($b$) 群$G$中与给定子群共轭的子群数必除尽$G$的阶.

1674. 利用习题1669和1671，求对称群$S_n$中与给定置换$s$共轭的置换的个数.

1675*. 证明：$p^n$阶群$G$的中心包含多于一个元素，其中$p$是素数.

1676*. 设$H$是次数$n \geqslant 5$的交代群$A_n$的任一正规子群，试证明：如果$H$包含至少一个三元轮换，则它与$A_n$重合.

1677*. ($a$) 求二十面体群(习题1639)的所有共轭元素类；

($b$) 证明：二十面体群是单纯群(亦即，除群本身和单位元子群外，它不含任何别的正规子群).

1678*. 证明：5次交代群是单纯群.

1679. 证明：群$G'$是有限循环群$G$的同态象当且仅当$G'$也

是循环群并且它的阶除尽 $G$ 的阶.

1680. 证明：如果群 $G$ 同态映射到群 $G'$ 上，$G$ 的元素 $a$ 映射到 $G'$ 的 $a'$，则

(a) $a$ 的阶被 $a'$ 的阶整除；

(b) $G$ 的阶被 $G'$ 的阶整除.

1681. 求所有的同态映射：

(a) $n$ 阶循环群 $\{a\}$ 到自身内；

(b) 6 阶循环群 $\{a\}$ 到 18 阶循环群 $\{b\}$ 内；

(c) 18 阶循环群 $\{a\}$ 到 6 阶循环群 $\{b\}$ 内；

(d) 12 阶循环群 $\{a\}$ 到 15 阶循环群 $\{b\}$ 内；

(e) 6 阶循环群 $\{a\}$ 到 25 阶循环群 $\{b\}$ 内.

1682. 证明：有理数加法群不可能同态映射到整数加法群上.

1683. 群 $G$ 到自身上的同构映射称为自同构，而到自身内的同态映射称为该群的自同态. 一个自同构 $\varphi$ 称为**内自同构**，如果存在 $G$ 内的一个元素 $x$，使得对于 $G$ 的任何 $a$ 都有 $a\varphi = x^{-1}ax$；否则，称为**外自同构**. 如果两个自同构 $\varphi$ 和 $\psi$ 连续实行：$a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$ 称为它们的积，则 $G$ 的所有自同构形成一个群. 如果两个自同态的加法用等式 $a(\varphi+\psi) = a\varphi + a\psi$ 定义，而乘法象自同构那样来定义，则 Abel 群 $G$ 的所有自同态形成一个环.

(a) 求 5 阶循环群 $\{a\}$ 的自同构群；

(b) 求 6 阶循环群 $\{a\}$ 的自同构群；

(c) 证明：对称群 $S_3$ 有 6 个内自同构而一个外自同构也没有；自同构群同构于 $S_3$；

(d) 四元群 $V$（习题 1638）有一个内自同构（恒等同构）和 5 个外自同构；自同构群同构于 $S_3$.

(e) 求 5 阶循环群 $\{a\}$ 的自同态环；

(f) 求 6 阶循环群 $\{a\}$ 的自同态环；

(g) 求 $n$ 阶循环群 $\{a\}$ 的自同态环.

1684. 证明下述两个商群同构：一个是对称群 $S_n$ 关于交代群 $A_n$ 的商群，一个是整数加法群关于偶数子群的商群.

1685.

(a) 求整数加法群关于给定自然数 $n$ 的倍数的子群的商群;

(b) 求 3 的倍数的整数加法群关于 15 的倍数的子群的商群;

(c) 求 4 的倍数的整数加法群关于 24 的倍数的子群的商群;

(d) 求不为零实数的乘法群关于正数子群的商群.

1686. 令 $G_n$ 是 $n$ 维线性空间的向量加法群，又令 $H_k$ 是 $k$ 维子空间的向量子群，$0\leqslant k\leqslant n$. 证明：商群 $G_n/H_k$ 同构于 $G_{n-k}$.

1687. 令 $G$ 是不为零复数的乘法群，又令 $H$ 是 $G$ 中位于实轴和虚轴上的所有数的集合.

(a) 证明：$H$ 是 $G$ 的子群;

(b) 求群 $G$ 关于子群 $H$ 的陪集;

(c) 证明：商群 $G/H$ 同构于乘法群 $U$, $U$ 是绝对值等于 1 的所有复数的乘法群.

1688*. 令 $G$ 是不为零复数的乘法群，$H$ 是 $G$ 中位于由零点出发构成等角的 $n$ 条射线上的数的集合，射线之一与正实轴重合；令 $K$ 是所有实数的加法群，$Z$ 是整数加法群，$D$ 是正数乘法群，$U$ 是绝对值等于 1 的复数的乘法群，而 $U_n$ 是 $n$ 次单位根的乘法群. 证明:

(a) $K/Z$ 同构于 $U$;

(b) $G/D$ 同构于 $U$;

(c) $G/U$ 同构于 $D$;

(d) $U/U_n$ 同构于 $U$;

(e) $G/U_n$ 同构于 $G$;

(f) $H$ 是 $G$ 的子群，且 $G/H$ 同构于 $U$;

(g) $H/D$ 同构于 $U_n$;

(h) $H/U_n$ 同构于 $D$.

1689. 对于 $n$ 阶非奇异方阵的乘法群,证明下列命题:

(a) 实矩阵群关于行列式为 1 的矩阵子群的商群,同构于不为零实数的乘法群;

(b) 实矩阵群关于行列式为 $\pm 1$ 的矩阵子群的商群,同构于正数的乘法群;

(c) 实矩阵群关于行列式为正的矩阵子群的商群,是一个二阶循环群;

(d) 复矩阵群关于行列式的绝对值等于 1 的矩阵子群的商群,同构于正数的乘法群;

(e) 复矩阵群关于行列式为正的矩阵子群的商群,同构于绝对值等于 1 的复数的乘法群.

1690. 令 $G$ 是三维空间所有运动的群, $H$ 是平移子群,而 $K$ 是绕给定点 $O$ 的旋转子群. 证明:

(a) $H$ 是 $G$ 的正规子群,而 $K$ 不是;

(b) 商群 $G/H$ 同构于 $K$.

1691. 证明:若群 $G$ 的正规子群 $H$ 有有限的指数 $j$, 则 $H$ 包含 $G$ 中其阶与 $j$ 互素的所有元素. 举例证明, 当子群 $H$ 不是正规子群时命题可能不真.

1692. 证明:商群 $G/H$ 是可换的当且仅当 $H$ 包含群 $G$ 的换位 $K$(习题 1665).

1693*. 证明: 不可换群 $G$ 关于它的中心 $Z$(习题 1664)的商群不可能是循环群.

1694*. 证明:如果有限群 $G$ 的阶被素数 $p$ 整除,则 $G$ 包含 $p$ 阶的元素(Cauchy 定理).

1695*. 令 $p$ 是素数、群 $G$ 称为 $p$-群 (在可换的情形, 称为准

素群)，如果它所有元素的阶都是有限的且等于$p$的某次幂．证明：有限群$G$是$p$-群当且仅当它的阶等于$p$的幂．

1696．证明：

(a) $n$维线性空间的向量的加法群是$n$个子群的直接和，这些子群是由空间的任一基底中的各向量所张成的一维子空间的向量所构成；

(b) 复数的加法群是实数子群和纯虚数子群的直接和；

(c) 实数乘法群是正数子群和数$\pm1$的子群的直积；

(d) 复数乘法群是正数子群和绝对值等于1的数的子群的直积．

1697．如果$G=A+B_1=A+B_2$是Abel群$G$的直接分解且$B_1$包含$B_2$，则$B_1=B_2$．

1698．证明：Abel群$G$的一个子群$H$是直接分解$G=H+K$中的一个加项当且仅当存在$G$到$H$上的一个同态映射保持$H$的所有元素不变．

1699．证明：如果$G=A+B$是群$G$的直接分解，则商群$G/A$同构于$B$．

1700．令$G=A_1+A_2+\cdots+A_s$是Abel群$G$分解为子群的直接和分解，又令

$$x=a_1+a_2+\cdots+a_s,\quad a_i\in A_i,\quad i=1,2,\cdots,s,$$

是相应的元素$x$分解为分量和的分解．证明：

(a) 群$G$是有限$n$阶的当且仅当每一个子群$A_i$有有限的阶$n_i$，$i=1,2,\cdots,s$，并且$n=n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_s$；

(b) 元素$x$是有限$p$阶的当且仅当它的每一个分量$a_i$是有限$p_i$阶的，$i=1,2,\cdots,s$并且$p$等于数$p_1,p_2,\cdots,p_s$的最小公倍数．

(c) 群$G$是有限循环群当且仅当所有的$A_i$都是有限循环群并且它们的阶两两互素．

1701. 把

(a) 6 阶的,

(b) 12 阶的,

(c) 60 阶的,

(d) 900 阶的

循环群 $\{a\}$ 分解为准素循环群的直接和.

1702.* 证明:

(a) 整数加法群,

(b) 有理数加法群,

(c) 准素循环群

不能分解为两个非零子群的直接和.

1703.* 令 $G$ 是非零的有限 Abel 群 (群的运算用加号). 证明下列命题:

(a) 如果 $G$ 所有元素的阶除尽互素数 $p$ 和 $q$ 的积 $pq$, 则 $G$ 可以分解为子群 $A$ 和 $B$ 的直接和, 其中 $A$ 所有元素的阶除尽 $p$, $B$ 所有元素的阶除尽 $q$; 注意子群之一, $A$ 或者 $B$, 可以证明是零;

(b) 对于群 $G$, 我们有(非零)准素子群的直接和分解 $G=A_1+A_2+\cdots+A_s$, 这些准素子群 $A_i$ 分别对应着不同的素数 $p_1, p_2, \cdots, p_s$. 这些子群 $A_i$ 称为 $G$ 的准素分量;

(c) 与素数 $p_i$ 对应的准素分量 $A_i$, 由 $G$ 中阶等于 $p_i$ 的幂的所有元素组成, 这一事实唯一地确定了群 $G$ 的准素分量分解;

(d) 群 $G$ 的非零子群 $H$ 的准素分量分解的形式为 $H=B_1+B_2+\cdots+B_s$, 其中 $B_i=H\cap A_i$, $i=1, 2, \cdots, s$; $H$ 的分解中的零子群 $B_i$ 可略去.

1704. 用 $G(n_1, n_2, \cdots, n_s)$ 表示分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 阶的循环群的直接和. 从有限 Abel 群的理论我们知道: 每一个 Abel 群可以唯一地(在同构之下)表为形式 $G(n_1, n_2, \cdots, n_s)$, 其中 $n_i$ 等于素

数(不一定不同)的幂. 应用这种记法,求(*a*)3, (*b*)4, (*c*)6, (*d*)8, (*e*)9, (*f*)12, (*g*)16, (*h*)24, (*i*)30, (*j*)36, (*k*)48, (*l*)60, (*m*)63, (*n*)72, (*o*)100 阶的所有的 Abel 群.

1705. 试把商群 $G/H$ 分解为准素循环子群和无限循环子群的直接和,其中 $G$ 是基底为 $x_1, x_2, x_3$ 的自由阿贝尔群,而 $H$ 是生成元如下的一个子群:

(*a*) $y_1=7x_1+2x_2+3x_3$, $y_2=21x_1+8x_2+9x_3$, $y_3=5x_1-4x_2+3x_3$;

(*b*) $y_1=4x_1+5x_2+3x_3$, $y_2=5x_1+6x_2+5x_3$, $y_3=8x_1+7x_2+9x_3$;

(*c*) $y_1=5x_1+5x_2+2x_3$, $y_2=11x_1+8x_2+5x_3$, $y_3=17x_1+5x_2+8x_3$;

(*d*) $y_1=6x_1+5x_2+7x_3$, $y_2=8x_1+7x_2+11x_3$, $y_3=6x_1+5x_2+11x_3$;

(*e*) $y_1=4x_1+5x_2+x_3$, $y_2=8x_1+9x_2+x_3$, $y_3=4x_1+6x_2+2x_3$;

(*f*) $y_1=2x_1+6x_2-2x_3$, $y_2=2x_1+8x_2-4x_3$, $y_3=4x_1+12x_2-4x_3$;

(*g*) $y_1=6x_1+5x_2-4x_3$, $y_2=7x_1+6x_2+9x_3$, $y_3=5x_1+4x_2-4x_3$;

(*h*) $y_1=x_1+2x_2+3x_3$, $y_2=2y_1$, $y_3=3y_1$;

(*i*) $y_1=4x_1+7x_2+3x_3$, $y_2=2x_1+3x_2+2x_3$, $y_3=6x_1+10x_2+5x_3$;

(*j*) $y_1=2x_1+3x_2+4x_3$, $y_2=5x_1+5x_2+6x_3$, $y_3=2x_1+6x_2+9x_3$.

1706*. 如果有限 Abel 群 $G$ 的阶分别等于

(*a*) 两不同素数 $p$ 和 $q$ 的积;

(*b*) 不相同的素数 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 的积,

则 $G$ 是循环群.

(*c*) 一 Abel 群 $G$ 的阶满足(*b*), 试求 $G$ 的所有子群, 并求这种子群的个数.

(*d*) 证明：如果有限 Abel 群 $G$ 的阶是 $n$, $k$ 是 $n$ 的任一因子，则存在 $G$ 的一个子群和一个商群并且后二者的阶都是 $k$.

1707*. 令 $G$ 是非零有限 Abel 群，且它所有非零元素的阶都是 $p$(称为初等群). 证明下列命题：

(*a*) $p$ 是素数；

(*b*) $G$ 可以分解为有限多个 $p$ 阶的循环子群的直接和，并且 $G$ 的阶为 $p^k$, 其中 $k$ 是项数；

(*c*) $G$ 的任一非零子群 $H$ 也是初等群，并且是 $G$ 的某一直接分解 $G=H+K$ 中的加项；

(*d*) 若初等群 $G$ 的阶数是 $p^k$, 则 $G$ 的 $p^l$ 阶子群的个数等于

$$\frac{(p^k-1)(p^k-p)(p^k-p^2)\cdots(p^k-p^{l-1})}{(p^l-1)(p^l-p)(p^l-p^2)\cdots(p^l-p^{l-1})},$$

其中 $k\geqslant l>0$.

1708*. 证明：有限 Abel 群 $G$ 是由它的最大阶的各元素生成的.

## §21. 环 和 域

确定下列集合中的哪些关于所指出的运算是环(但不是域)，哪些是域(如未指明运算，则理解为数的加法和乘法)：

1709. 整数.

1710. 偶数.

1711. 是 $n$ 的倍数的整数($n=0$ 的情形个别考虑).

1712. 有理数.

1713. 实数.

1714. 复数.

1715. 形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数，其中 $a$ 和 $b$ 是整数.

1716. 形如 $a+b\sqrt{3}$ 的数，其中 $a$ 和 $b$ 是有理数.

1717. 形如 $a+bi$ 的复数，其中 $a$ 和 $b$ 是整数.

1718. 形如 $a+bi$ 的复数，其中 $a$ 和 $b$ 是有理数.

1719. $n$ 阶的整数矩阵，关于矩阵的加法和乘法.

1720. $n$ 阶的实数矩阵，关于矩阵的加法和乘法.

1721. 区间 $[-1,1]$ 上的实值连续函数，关于通常的函数加法和乘法.

1722. 一个未知量 $x$ 的整系数多项式，关于通常的加法和乘法运算.

1723. 一个未知量 $x$ 的实系数多项式，关于通常的加法和乘法运算.

1724. 形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ 的并且 $a$ 和 $b$ 是有理数(或实数)的所有矩阵，关于通常的矩阵加法和乘法.

1725*. 所有实系数三角多项式 $a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的集合是否形成一个环？对仅含余弦的多项式 $a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx$ 的集合，以及仅含正弦的多项式 $\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kx$ 的集合回答同样的问题.

1726*. 形如 $a+b\sqrt[3]{2}$ 的数，其中 $a$ 和 $b$ 是有理数，在通常的运算下是否形成一个环(为确定起见，取根的实值)？

1727*. 证明：形如 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ 的数形成一个域，其中 $a$，$b$ 和 $c$ 都是有理数；并且证明这域中的每一个元素可以唯一地表为上述形式. 试求数 $1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$ 的逆元素(我们假定取根的实值).

1728. 证明：形如 $a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}$ 的数形成一域，其中 $a$，$b$ 和 $c$ 是有理数；在该域中求 $x=2+3\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}$ 的逆元素.

1729*. 令 $f(x)$ 是 $n>1$ 次的有理系数多项式，它在有理数域上不可约，又令 $\alpha$ 是它的一个根．试证明：形如 $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$ 的数，其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是有理数，形成一个域；并且这域的每一个元素可以唯一地写为上述形式．通常我们说：这个域是把数 $\alpha$ 合并到有理数域而得到的域．

1730*. 在把多项式 $f(x)=x^3+4x^2-2x-6$ 的根 $\alpha$ 合并到有理数域而得的域中（习题 1729），求 $\beta=3-\alpha+\alpha^2$ 的逆元素．

1731. 证明：$n\geqslant2$ 阶的实元素的所有对角形矩阵，亦即所有形如

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

的矩阵，在通常的矩阵加法和乘法运算下，形成一个有零因子的可换环．

1732. 在区间 $[-1, 1]$ 上的连续函数环中，举出零因子的例子．

1733. 证明：元素取自某域的 $n$ 阶方阵环中，奇异矩阵是且只有它们是零因子．

1734. 证明：整数对 $(a, b)$，如果运算用下列等式规定：

$$(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2),$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2)=(a_1a_2, b_1b_2),$$

则形成一个环，并求此环的所有零因子．

1735. 证明：域没有零因子．

1736. 证明：对一环中的给定元素 $a$ 和任何元素 $x$ 和 $y$，从等

式 $ax=ay$ 可推出 $x=y$ 当且仅当 $a$ 不是左零因子.

1737. 证明：元素取自某域且从第二行起所有各行由零组成的 $n\geqslant 2$ 阶矩阵，形成一个环；并且，这环任一非零元素都是右零因子. 这环中什么样的矩阵不是左零因子?

1738* 证明：在有单位元 $e$ 的环中，加法的可换性可从环的其余公理推出.

1739. 先证明：不利用加法的可换性可以证明零的性质和零因子的性质. 然后证明：在包含至少一个不是零因子的元素 $c$ 的环中，加法的可换性可从环的其余公理推出.

1740. 举出特别形式的矩阵环的例子，使它具有一些右单位元或一些左单位元.

1741. 令给定一整数 $n\geqslant 0$. 两个整数 $a$ 和 $b$ 称为关于模 $n$ 同余[记为 $a\equiv b(\bmod n)$]，如果它们的差 $a-b$ 被 $n$ 整除(当 $n=0$ 时，这表示 $a=b$；当 $n>0$ 时，这意味着当 $a$ 和 $b$ 除以 $n$ 时得到同一个余数——关于模 $n$ 的剩余). 证明：所有整数的集合 $Z$ 可以划分成一些类，使每类由彼此同余的数组成且各类间没有任何公共元素. 我们用对每类的代表的加法和乘法运算作为类的加法和乘法，亦即如果数 $a, b, a+b, ab$ 分别属于类 $A, B, C, D$，则令 $A+B=C, AB=D$.

证明：在如此的运算下，类的集合是一个环 (模 $n$ 的剩余环 $Z_n$).

1742* 证明：包含多于一个元素的无零因子有限可换环，是一个域.

1743* 证明：模 $n$ 的剩余环(1741题)是域当且仅当 $n$ 是素数.

1744. 一个方阵，如果它主对角线元素彼此相等，其余元素等于零，则称为**纯量矩阵**. 证明：$n$ 阶实元素纯量矩阵，在通常运算下，形成一个与实数域同构的域.

1745. 证明：$a$ 和 $b$ 为实数的形如$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$的矩阵，形成一个与复数域同构的域.

1746. 证明：$a$，$b$ 为有理数的形如$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$的矩阵所成的域（习题 1724），同构于 $a$，$b$ 为有理数的形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数所成的域。

1747*. 证明：形如

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

的实矩阵的代数，同构于四元数 $a+bi+cj+dk$ 的代数。

1748. 证明：形如

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

的矩阵的代数（其中 $a, b, c, d$ 是实数，而 $i=\sqrt{-1}$），同构于四元数 $a+bi+cj+dk$ 的代数。

1749. 求复数域的保持实数不变的所有的自同构（亦即到自身上的同构映射）.

1750*. 证明：任何数域包含有理数域作为子域.

1751*. 证明：在数域的任何同构下，有理数子域被恒等映射.特别地，有理数域到自身的同构映射只能是恒等映射.

1752*. 证明：恒等映射是实数域到自身内的唯一的同构映射.

1753. 利用习题 1752，求复数域到自身内的变实数仍为实数的所有同构映射.

1754. 证明：任一特征为零的域的极小子域同构于有理数域.

1755. 证明：任一特征为 $p$ 的域的极小子域同构于模 $p$ 的剩余域.

1756. 在模 3 和模 5 的剩余域中，解下列组

$$\begin{cases} x+2z=1, \\ y+2z=2, \\ 2x+z=1. \end{cases}$$

1757. 在模 5 和模 7 的剩余域上解方程组：$3x+y+2z=1$, $x+2y+3z=1$, $4x+3y+2z=1$.

1758. 在

(a) 模 3 的剩余域上；

(b) 有理数域上，

求多项式

$$f(x)=x^3+x^2+2x+2,\quad g(x)=x^2+x+1$$

的最大公因子.

1759. 在下列两个域上求多项式

$$f(x)=5x^3+x^2+5x+1,\quad g(x)=5x^2+21x+4$$

的最大公因子.

(a) 模 5 的剩余域上（此处每一个系数 $a$ 理解为上述域单位元 $e$ 的倍数 $ae$，或者各系数用它们的模 5 最小非负剩余来代替）；

(b) 有理数域上.

1760. 在

(a) 模 3 的剩余域上；

(b) 模 5 的剩余域上，

求多项式

$$f(x)=x^4+1,\quad g(x)=x^3+x+1$$

的最大公因子.

1761*. (a) 证明：如果整系数的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在关于素

数模 $p$ 的剩余域 $Z_p$ 上是互素的，且至少有一个首项系数不被 $p$ 整除，则这两个多项式在有理数域上是互素的.

(b) 用例子证明：对任一素数 $p$，逆断言不真.

1762*. 证明：整系数的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在有理数域上是互素的当且仅当：除有限多个素数外，对任何素数 $p$，二多项式在模 $p$ 的剩余域上是互素的.

1763. 在模 2 的剩余域上分解多项式 $x^5+x^3+x^2+1$ 为不可约因子.

1764. 在模 5 的剩余域上分解多项式 $x^3+2x^2+4x+1$ 为不可约因子.

1765. 在模 3 的剩余域上分解多项式 $x^4+x^3+x-2$ 为不可约因子.

1766. 在模 5 的剩余域上分解多项式 $x^4+3x^3+2x^2+x+4$ 为不可约因子.

1767. 在模 2 的剩余域上，把 $x$ 的所有二次多项式分解为不可约因子.

1768. 在模 2 的剩余域上，把 $x$ 的所有三次多项式分解为不可约因子.

1769. 求 $x$ 的首项系数为 1 的在模 3 的剩余域上不可约的所有二次多项式.

1770. 求 $x$ 的首项系数为 1 的在模 3 的剩余域上不可约的所有三次多项式.

1771*. 证明：如果整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上是可约的，$p$ 是不整除首项系数的任一素数，则这多项式在模 $p$ 的剩余域上是可约的. 举出一多项式，使得它在有理数域上可约，但它在模 $p$ 的剩余域上不可约，其中 $p$ 能整除首项系数.

1772*. 证明：素数 $p$ 的剩余域 $Z_p$ 的乘法群 $G$ 是循环群.

1773*. 存在整系数的多项式，它们在有理数域上是不可约的，但在任一素数 $p$ 的剩余域上是可约的.

作为例子，证明多项式 $f(x)=x^4-10x^2+1$ 即是如此. 这个多项式是有根 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的最低次整系数多项式.

1774*. 证明：如果可换环 $R$ 的所有元素有公因子 $a$，则环有单位元素.

1775. 指出有单位元的一个可换环，使这环包含具有下列性质之一的元素 $a\neq0$:

(a) $a^2=0$;

(b) 对给定整数 $n>1$，下述条件成立：如果 $0<k<n$，则 $a^n=0, a^k\neq0$.

1776. 令 $R$ 是具有单位元 $e$ 的可换环. 证明:

(a) 乘法逆元素(亦即单位元的因子)不可能是零因子;

(b) 乘法逆元素有唯一的逆元素;

(c) 如果 $\delta$, $\varepsilon$ 是可逆元，则 $a$ 被 $b$ 整除当且仅当 $a\delta$ 被 $b\varepsilon$ 整除;

(d) $R$ 中元素 $a$ 的主理想 $(a)$ 与 $R$ 不同当且仅当 $a$ 是不可逆的.

1777. 令 $R$ 是有单位元 $e$ 的可换环且没有零因子. 证明:

(a) 元素 $a$ 和 $b$ 是相伴的当且仅当这二元素中每一元素被另一元素整除;

(b) 主理想$(a)$和$(b)$重合当且仅当 $a$ 和 $b$ 是相伴的（主理想的定义在习题 1783 中给出）.

1778. 令 $R$ 是有单位元 $e$ 的可换环，又令 $R\langle x\rangle$ 是所有形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$ 的集合，$\alpha_n\in R$.

我们引进通常的级数的加法和乘法运算:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n+\beta_n)x^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n x^n,$$

其中 $\gamma_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}$.

证明:

(*a*) $R\langle x\rangle$是有单位元的可换环;

(*b*) $R\langle x\rangle$包含一个同构于$R$的子环;

(*c*) 如果$R$没有零因子,则$R\langle x\rangle$也没有零因子;

(*d*) 如果$R$是域, 则$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$是环$R\langle x\rangle$的乘法逆元素当且仅当$\alpha_0\neq 0$.

1779*. 令$R$是形为$a+b\sqrt{-3}$的所有数的集合,其中$a$和$b$是有理整数. 证明: $R$是有单位元的环, 在这环中分解为素因子的分解存在但不唯一. 特别,证明: 以下两个分解

$$4=2\cdot 2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$$

中的因子是素因子, 而2不与$1+\sqrt{-3}$相伴.

1780*. 证明: 所有有限和$\sum a_i x^{r_i}$, 其中$a_i$是实数, $r_i$是非负的二进制有理数(参看习题1634 (13)),关于函数的通常的加法和乘法运算形成一个有单位元的可换环并且没有零因子. 在这环中不存在素元素.

1781. 试判明下列各集合是否为所指出环的加法群的子群,子环,或理想:

(*a*) $n>1$的倍数的集合$nZ$,在整数环$Z$中;

(*b*) 整数集合$Z$,在整多项式环$Z[x]$中;

(*c*) 系数是数$n>1$的倍数的多项式集合$nZ[x]$,在整多项式

环 $Z[x]$ 中;

(*d*) 自然数集合 $N$, 在整数环 $Z$ 中;

(*e*) 整数集合 $Z$, 在 Gauss 整数环 $A$ 中, Gauss 整数即形为 $a+bi$ 的数, $a$ 和 $b$ 是有理整数;

(*f*) 数 $a+bi$ 的集合 $F$, 其中 $a=b$, 在 Gauss 整数环 $A$ 中;

(*g*) 形如 $x(1+i)$ 的数集 $C$, 在 Gauss 整数环 $A$ 中, 其中 $x$ 跑遍整个环 $A$;

(*h*) 整多项式集合 $Z[x]$, 在有理数域 $R$ 上的多项式环 $R[x]$ 中;

(*i*) 对所有 $k<n, n>1$, 不包含 $x^k$ 的项的多项式集合 $I$, 在整多项式环 $Z[x]$ 中;

(*j*) 常数项为偶数的多项式集合 $I$, 在整多项式环 $Z[x]$ 中;

(*k*) 首项系数为偶数的多项式集合 $I$, 在整多项式环 $Z[x]$ 中.

1782. 证明: 可换环 $R$ 的任意多个理想的交仍是一个理想.

1783. 由可换环 $R$ 的一个元素 $a$ 所生成的主理想 $(a)$, 指的是包含 $a$ 的最小理想. 证明: 对任一元素 $a\in R$, 理想 $(a)$ 都存在并由下列形式的所有元素组成:

(*a*) $ra$, 其中 $r$ 是 $R$ 中任一元素, 如果 $R$ 有单位元;

(*b*) $ra+na$, 其中 $r$ 是 $R$ 中任一元素而 $n$ 是任一整数, 如果 $R$ 没有单位元.

1784. 包含 $M$ 的最小理想, 称为由可换环 $R$ 的集 $M$ 生成的理想 $(M)$. 如果集 $M$ 包含有限个元素 $a_1, \cdots, a_s$, 则理想 $(M)$ 也表示为 $(a_1, \cdots, a_s)$. 证明: 对任一非空集 $M\subset R$, 理想 $(M)$ 存在并且由下列形式的所有有限和组成:

(*a*) $\Sigma r_i a_i$; $r_i\in R, a_i\in M$, 如果 $R$ 有单位元;

(*b*) $\Sigma r_i a_i+\Sigma n_i a_i$; $r_i\in R, a_i\in M$; $n_i$ 是整数, 如果 $R$ 没有单位元.

1785*. 如果一可换环有单位元没有零因子，且其中每一个理想都是主理想(参看习题 1783)，则称为主理想环. 证明：下列每一个环都是主理想环：

(a) 整数环 Z；

(b) 域 $P$ 上的一个未知元 $x$ 的多项式环 $P[x]$；

(c) Gauss 整数环 $A$.

1786. 可换环 $R$ 的理想 $I_1, I_2, \cdots, I_k$ 的和，指的是 $R$ 中可以表示为如下形式的所有元素 $x$ 的集合 $I$：

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_k;\quad x_i\in I_i;\quad i=1,2,\cdots,k.$$

我们记 $I=I_1+I_2+\cdots+I_k$. 如果对 $I$ 中的任一个 $x$ 上述表示法是唯一的，则和 $I$ 称为理想 $I_i$ 的直接和. 此时我们写 $I=I_1\dotplus I_2\dotplus\cdots\dotplus I_k$.

证明：(a)任意有限多个理想的和是一个理想；

(b) 两个理想的和是一个直接和当且仅当它们的交只包含零元素.

1787. 证明：如果 $I=I_1\dotplus I_2$ 是理想 $I_1, I_2$ 的直接和，则 $I_1$ 中任一元素与 $I_2$ 中任一元素的积等于零元素.

1788. 令 $R=I_1\dotplus I_2$ 是有单位元 $e$ 的可换环 $R$ 的非零理想 $I_1$，$I_2$ 的直接和分解.

证明：如果 $e=e_1+e_2$, $e_1\in I_1$, $e_2\in I_2$, 则 $e_1$, $e_2$ 分别是 $I_1, I_2$ 中的单位元素，但不是 $R$ 中的单位元素.

1789. 证明：实系数多项式环 $D[x]$ 关于能被 $x^2+1$ 整除的多项式的理想的商环，同构于复数 $a+bi$ 的域，其中加法和乘法运算如同常见教科书中那样定义.

1790. 证明：域 $P$ 到环 $R$ 内的任一同态映射，或者是到某一域(它作为 $R$ 的子环而含于 $R$, 称为 $P$ 在 $R$ 中的嵌入) 上的同构映射，或者是 $P$ 中所有元素到 $R$ 的零元素的映射

1791. 令 $Z$ 是整数环, 又令 $R$ 是任一有单位元 $e$ 的环. 证明: 映射 $\varphi(n)=ne$ 是 $Z$ 到 $R$ 内的同态映射. 求在这一同态下, 环 $Z$ 的象 $\varphi(Z)$.

1792. 令 $A$ 是 Gauss 整数环, 又令 $I$ 是所有数 $a+bi$ 的集, 其中 $a$ 和 $b$ 是偶数;

(a) 证明: $I$ 是 $A$ 中的一个理想,

(b) 求 $A$ 关于 $I$ 的陪集;

(c) 在商环 $A/I$ 中求零因子, 从而用此法证明 $A/I$ 不是域.

1793. 证明: Gauss 整数环 $A$ 关于主理想 $I=(3)$的商环$A/I$, 是一个九元素的域.

1794. 证明: Gauss 整数环 $A$ 关于主理想 $I=(n)$的商环 $A/I$ 是一个域当且仅当 $n$ 是素数并且不等于两个整数的平方和.

1795. 令 $P[x,y]$是域 $P$ 上两个未知元 $x$, $y$ 的多项式环, 又令 $I$ 是此环中没有常数项的所有多项式的集合. 证明:

(a) $I$ 是一个理想但不是主理想;

(b) 商环 $P[x,y]/I$ 同构于域 $P$.

1796. 在整多项式环 $Z[x]$中, 令$I=(x,2)$是由二个元素 $x$ 和 2的集所生成的理想. 证明:

(a) 理想 $I$ 由带偶常数项的所有多项式组成;

(b) 理想 $I$ 不是主理想;

(c) 商环 $Z[x]/I$ 同构于模 2 的剩余域.

1797. 在整多项式环 $Z[x]$中, 令$(n)$是由整数 $n>1$ 所生成的理想. 证明: 商环 $Z[x]/(n)$ 同构于环 $Z_n[x]$, $Z_n[x]$是模 $n$ 剩余环上的多项式环.

1798. 令 $R$ 是定义在整个数直线上所有实函数 $f(x)$ 在通常加法和乘法运算下所形成的环, 又令 $c$ 是一实数. 证明:

(a) 映射 $\varphi[f(x)]=f(c)$是环 $R$ 到实数域 $D$ 上的一个同态映

射；

(*b*) 同态 $\varphi$ 的核是 $R$ 的一个理想(所谓同态 $\varphi$ 的核，即环 $R$ 的所有映射为数 0 的那些元素的集合 $I$)。

(*c*) 商环 $R/I$ 同构于实数域 $D$.

1799. 令 $Z_p$ 是关于素模 $p$ 的剩余域，又令 $f(x)$ 是环 $Z_p[x]$ 中的 $n$ 次不可约(在域 $Z_p$ 上)多项式(从域的理论我们知道：对任一素数 $p$ 及对任一自然数 $n$，这种多项式是存在的)，又令 $I$ 是环 $Z_p[x]$ 中由多项式 $f(x)$ 生成的主理想. 证明：商环 $Z_p[x]/I$ 是一个有限域；并求它的元素个数。

## §22. 模

所谓环 $R$ 上的左模，是一个 Abel 群 $M$ (通常把运算写成加法)，并且对 $M$ 中的元素我们定义了与 $R$ 中元素的乘法，使得对于任意 $\lambda\in R, a\in M$，有 $\lambda a\in M$，此外下列各条件也成立(这些条件类似于线性空间中向量与纯量的乘法的性质)：

1. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$,
2. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$,
3. $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$,

其中 $\lambda, \mu\in R$; $a, b\in M$.

除此之外，如果环 $R$ 有单位元素 $e$ 并且

4. $ea=a, a\in M$,

则 $M$ 就称为环 $R$ 上的单位左模.

设 $A$ 是环 $R$ 上左模 $M$ 的子群，并且，对于任意 $\lambda\in R, a\in A$，有 $\lambda a\in A$，则 $A$ 称为环 $R$ 上左模 $M$ 的子模。

同一个环 $R$ 上的左模 $M$ 到左模 $M'$ 的一个映射 $\varphi$ 被称为是**同态的**，如果对任意 $a, b\in M, \lambda\in R$，有 $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$，$\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a)$.

模$M$到模$M'$（同一环上的二模）上的互逆一对一且同态的映射称做同构映射（或称做同构），并称模$M$和模$M'$是同构的．

环$R$上的左模$M$关于子模$A$的商模$M/A$，指的是商群$M/A$并且其中定义了与$R$中元素的乘法：$\lambda(x+A)=\lambda x+A$．

环$R$上左模$M$的元素$a$的阶$O(a)$[或称为零化子，$\mathrm{Ann}(a)$]，是指使$\lambda a=0$的所有元素$\lambda\in R$的集合．如果元素$a$的阶只包含$R$中的零元，则$a$称为自由元素（或零阶元素），否则$a$称为周期元素（或非零阶元素）．

用乘法$a\lambda\in M$，$a\in M$，$\lambda\in R$我们可以类似地定义环$R$上的右模，以及有关的各概念．

在下列各习题中，当我们谈到环$R$上的模$M$时，为确定起见，总理解$M$是环$R$上的左模，虽然相应的性质对环$R$上的右模也成立．

为简化起见，一些习题仅就可换环的情形叙述，虽然它们可以推广到非可换环上的模上去．

1800．举出环$R$上模$M$的例子，使在$R$中有$\lambda\neq 0$，在$M$中有$a\neq 0$，但$\lambda a=0$．

1801．验证：任一Abel群$G$（用加法来写）是整数环$\mathbf{Z}$上的模．

1802．环$R$上的左模称为平凡的，如果对任意$\lambda\in R$，$a\in M$有$\lambda a=0$．证明：有单位元素$\varepsilon$的环$R$上的左模$M$可以分解为子模的直接和：$M=M_1\dot{+}M_2$，其中$M_1$是单位左模，而$M_2$是平凡的，$M_1$包含使$\varepsilon a=a$的所有元素$a\in M$，而$M_2$包含使$\varepsilon a=0$的所有元素$a\in M$．

1803．证明：

(a) 如果把一个可换环$R$看成自身上的左模，则这模的子模与环$R$的理想重合．

(*b*) 如果把一个非可换环$R$看成自身上的左模(或右模)，则这模的子模与环$R$的左理想(或右理想)重合.

1804*. 证明：关于素数$p$的准素 Abel 群$G$(参看习题1695)，可以看成环$R$上的单位模，其中$R$由分母不被$p$整除的有理数构成.

1805. 由环$R$上左模$M$中的一个元素$a$所生成的循环子模，是指包含$a$的极小子模$\{a\}$. 证明：对任一个$a\in M$，循环子模$\{a\}$存在且由模$M$中所有下列形式的元素组成：

(*a*) $\lambda a$，其中$\lambda\in R$，如果$M$是单位模.

(*b*) $\lambda a+na$，其中$\lambda\in R$而$n$是整数，如果$M$是任一模.

1806. 证明：域$P$上的一个$n$维线性空间(在同样的运算下)是$P$上的一个单位模，并且这一模可以分解为$n$个循环子模的直接和.

1807. 令$R$是有单位元素$e$的可换环，$M$是$R$上的单位模，又令$\{a\}$和$\{b\}$分别是$a$和$b$的循环模. $O(a)$和$O(b)$是$a$和$b$的阶.

(*a*) 证明：如果$\{a\}=\{b\}$，则$O(a)=O(b)$；

(*b*) 用一个例子说明：为使等式$\{a\}=\{b\}$成立，条件$O(a)=O(b)$是不充分的；

(*c*) 证明：等式$\{a\}=\{b\}$成立的必要充分条件是$b=\alpha a$，$a=\beta b$. 其中$\alpha, \beta$是$R$中某二元素；

(*d*) 证明：等式$\{a\}=\{b\}$成立的必要充分条件是下列条件成立：$b=\alpha a$，其中$\alpha\in R$并且关于模$O(a)$可逆；亦即陪集$\alpha+O(a)$是商环$R/O(a)$的一个可逆元素.

1808* 证明：主理想环$R$上的循环模$M=\{a\}$的任一个子模$A$，是循环子模.

1809. 令$R$是所有形如$\alpha=(a_1, a_2, \cdots)$的整数无穷序列的集

合，$R$中的加法和乘法施于分量之上．证明：$R$是有单位元的可换环，也就是说是本身上的一个循环模．在这个模中，求没有有限生成元的子模．这说明循环模的子模不一定是循环的，还说明：有有限个生成元的模的子模不一定有有限个生成元．

1810．令$M$是可换环$R$上的模．

(a) 证明：如果$R$没有零因子，则所有周期元素的集合$A\subset M$是模$M$的一个子模；

(b) 用例证明：对于有零因子的环$R$，上述断言可能是错误的．

1811*．令$M$是主理想环$R$上的一个模，$a$和$b$是$M$中阶为$O(a)=(\alpha)$，$O(b)=(\beta)$的周期元素，又令$\delta$是$\alpha$和$\beta$的最大公因子．证明：元素$a+b$也是周期元素，阶为$O(a+b)=(\gamma)$，并且

(a) $\gamma$整除$\dfrac{\alpha\beta}{\delta}$；

(b) $\gamma$是$\dfrac{\alpha\beta}{\delta^2}$的倍数．

1812*．如果一个模$M$的所有元素都是周期元素，则称$M$是周期模．主理想环$R$上的模$M$被称为准素模，如果$M$中的所有元素的阶是$R$的一些理想，且由$R$中同一个简单元素$p$的幂所生成．说模$M$是它的一组子模$M_i$(不必有限多个)的直接和，如果$M$中的每一个非零元素可以唯一地表为有限多个取自某$M_i$的（每次取一个）非零元素的和．试证明：主理想环$R$上的任一周期模$M$可以分解为准素子模的直接和．

1813*．令$M$是环$R$上的模．证明下列定理：$M$中的任一子模可以有有限多个生成元的必要充分条件是在$M$中关于子模的极大性条件成立，即：子模的任一递增序列$M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots$(不必不同)

在有限步成为稳定的．特别说来，如果把环视为自身上的模，则对环$R$的理想而言极大性条件成立．

1814．证明：如果$\{a\}$和$\{b\}$是同一个环$R$上的循环单位模，而$a$和$b$的阶之间有包含关系$O(a)\subset O(b)$，则存在由$\{a\}$到$\{b\}$上的同态映射．

1815．令$R$是有单位元素$\varepsilon$的可换环，而$M=\{a\}$是$R$上循环单位模．证明：

($a$) 元素$a$的阶$O(a)$是$R$的一个理想；

($b$) 把商环$R/O(a)$视为$R$上的模，乘法用$R$中的乘法定义，则它同构于模$M$.

1816．令$M=A\dot{+}B$是环$R$上模$M$分解为子模$A$和$B$的直接和的分解式．证明：商模$M/A$作为$R$上的模是与模$B$同构的．

1817．说模$M$是模$A$通过模$B$的扩张，如果$A$是$M$的子模并且商模$M/A$同构于$B$($M, A, B$是同一个环$R$上的模)．证明：有有限个生成元的模通过一个有有限个生成元的模的扩张仍是一个有有限个生成元的模．

1818．证明：如果关于子模的极大性条件在模$M$中成立(参看习题1813)，则在模$M$关于任一子模$A$的商模$M/A$中，这一条件也成立．

1819*．令$A, B$是环$R$上模$M$的两个子模．证明下列同构定理：

$$(A+B)/A\cong B/(A\cap B).$$

1820．令$R$是有单位元素的可换环，$M$是$R$上有有限个生成元$x_1, x_2, \cdots, x_n$的单位模．证明：如果极大性条件关于环$R$中的理想成立，则这条件关于模$M$中的子模也成立(这个定理可以推广到非可换环，极大性条件换成关于左理想或右理想的)．

## § 23. 线性空间和线性变换

(对第 10, 16—19 节的补充)

1821. 证明: 等式 $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}=\beta\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$(其中$\alpha$, $\beta$ 是数, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$是向量)成立的必要充分条件是 $\alpha=\beta$ 或者 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 成立.

1822*. ($a$) 不利用向量加法的可交换性, 证明: 右逆元和右零元也是左逆元和左零元.

($b$) 利用($a$) 证明: 向量加法的可交换性可从线性空间的其他公理推出.

1823. 令 $D$ 是实数域, 而 $\boldsymbol{V}$ 是定义于区间$[a, b]$上取正值的所有函数的集合. 我们用下列等式定义两个函数的加法以及函数与纯量的乘法:

$$f\oplus g=fg,\quad \alpha\odot f=f^{\alpha},\quad f, g\in\boldsymbol{V},\quad \alpha\in D.$$

($a$) 证明: 在上述运算之下, $\boldsymbol{V}$ 是域 $D$ 上的线性空间.

($b$) 证明: 空间$\boldsymbol{V}$同构于空间$\boldsymbol{V}'$, 其中$\boldsymbol{V}'$是定义于区间$[a, b]$上的所有的实函数, 函数的加法以及函数与实数的乘法如常;

($c$) 求空间$\boldsymbol{V}$的维数.

1824. 证明: 函数组 $e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$是线性无关的, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是互不相同的实数.

1825*. 证明: 函数组 $x^{\alpha_1}, \cdots, x^{\alpha_n}$ 线性无关, 其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是互不相同的实数.

1826*. 证明: 下列各函数组均线性无关:

($a$) $\sin x$, $\cos x$;

($b$) $1$, $\sin x$, $\cos x$;

($c$) $\sin x$, $\sin 2x$, $\cdots$, $\sin nx$;

($d$) $1$, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cdots$, $\cos nx$;

(e) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx$.

1827*. 证明：下列各函数组线性无关：

(a) $1, \sin x, \sin^2 x, \cdots, \sin^n x$;

(b) $1, \cos x, \cos^2 x, \cdots, \cos^n x$.

1828. 证明：下列各函数组线性相关：

(a) $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \cdots, \sin^n x, \cos^n x$，其中 $n \geqslant 2$;

(b) $\sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \cdots, \sin^n x, \cos^n x$，其中 $n \geqslant 4$.

1829*. 证明：$n$ 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实系数的(或系数取自任何域) $k$ 次齐次多项式全体以及零在通常的运算下形成一个线性空间；求这空间的维数.

1830*. 证明：$n$ 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的次数 $\leqslant k$ 的实系数(或系数取自任一域)多项式全体以及零在通常的运算下形成一个线性空间；求这空间的维数.

1831. 令 $\boldsymbol{V}$ 是 $x$ 的次数 $\leqslant n (n \geqslant 1)$ 的实系数多项式全体所成的线性空间.

(a) 证明：$\boldsymbol{V}$ 中有给定实根 $c$ 的全体多项式的集合 $\boldsymbol{L}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个子空间；

(b) 求 $\boldsymbol{L}$ 的维数；

(c) 对 $\boldsymbol{V}$ 中有 $k$ 个不同实根 $c_1, \cdots, c_k$(不计重数)的全体多项式的集合 $\boldsymbol{L}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 证明同样的问题；

(d) $\boldsymbol{V}$ 中有单实根 $c$ 的全体多项式的集合 $\boldsymbol{L}'$ 是子空间吗？

1832*. 证明定理：$n$ 维空间 $\boldsymbol{V}_n$ 中的两个线性独立的向量组

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_k \tag{2}$$

是等价的(或者说生成同一个子空间)必要充分条件是：在任一基

底下，由两组向量的坐标行所组成的矩阵 $A$ 和 $B$ 的各子式成比例.

1833. 证明：$n$ 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 的任一子空间 $\boldsymbol{L}$ 是某一线性变换 $\varphi$ 的值域.

1834. 证明：$n$ 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 的任一子空间 $\boldsymbol{L}$ 是某一线性变换 $\varphi$ 的核.

1835. 证明：对于线性变换 $\varphi$ 的互不相同的特征值 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\cdots$, $\lambda_k$ 中的每一个，我们取一个线性无关的特征向量组，则包含所取的所有向量的组是线性无关的.

1836*. 令 $\boldsymbol{V}$ 是实线性空间(或特征不为 2 的域 $P$ 上的一个线性空间)，又令 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}\dot{+}\boldsymbol{M}$ 是空间 $\boldsymbol{V}$ 分解为子空间 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 直接和的分解式. 则任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以唯一地表为形式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{z}\in\boldsymbol{M}.$$

用 $\varphi\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 所定义的线性变换 $\varphi$ 称为空间 $\boldsymbol{V}$ 的平行于 $\boldsymbol{M}$ 在 $\boldsymbol{L}$ 上的射影. 按照习题 1538，射影等同于幂等变换，亦即等同于有性质 $\varphi^2=\varphi$ 的线性变换. 应用这一事实，试证明以下各断言：

(*a*) 如果 $\varphi$ 是平行于 $\boldsymbol{M}$ 在 $\boldsymbol{L}$ 上的射影而 $\varepsilon$ 是恒等变换，则 $\varepsilon-\varphi$ 是平行于 $\boldsymbol{L}$ 在 $\boldsymbol{M}$ 上的射影；

(*b*) 两个射影 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 的和 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ 是射影的必要充分条件是

$$\varphi_1\varphi_2=\varphi_2\varphi_1=\omega, \tag{1}$$

其中 $\omega$ 是零变换；如果 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 分别是平行于 $\boldsymbol{M}_1$ 在 $\boldsymbol{L}_1$ 上的射影和平行于 $\boldsymbol{M}_2$ 在 $\boldsymbol{L}_2$ 上的射影，并且条件(1)成立，则 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ 是平行于 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1\cap\boldsymbol{M}_2$ 在 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1\dot{+}\boldsymbol{L}_2$ 上的射影；

(*c*) 两个射影 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 的差 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ 是射影的必要充分条件是

$$\varphi_1\varphi_2=\varphi_2\varphi_1=\varphi_2; \tag{2}$$

如果 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 是在(*b*)中所定义的射影且条件(2)成立，则 $\varphi=\varphi_1$

$-\varphi_2$是平行于$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1\dotplus\boldsymbol{L}_2$在$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1\cap\boldsymbol{M}_2$上的射影；

(*d*) 两个射影$\varphi_1$和$\varphi_2$之积$\varphi=\varphi_1\varphi_2$是射影的充分条件是

$$\varphi_1\varphi_2=\varphi_2\varphi_1; \tag{3}$$

如果$\varphi_1$和$\varphi_2$是(*b*)中所定义的射影且条件(3)成立，则$\varphi=\varphi_1\varphi_2$是平行于$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2$(此处和不必是直接和)在$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1\cap\boldsymbol{L}_2$上的射影. 用例说明：条件(3)不是射影$\varphi_1$和$\varphi_2$之积是射影的必要条件.

1837*. 证明：如果对于欧几里得空间到自身内的变换$\varphi$,存在共轭变换$\varphi^*$,亦即存在有如下性质的变换$\varphi^*$：$(\varphi\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \varphi^*\boldsymbol{y})$，对$\boldsymbol{V}$中的任何向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$. 则$\varphi$和$\varphi^*$是线性的. 特别说来，对称变换和斜对称变换可以去掉线性这一要求，而分别用等式$(\varphi\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\varphi\boldsymbol{y})$和$(\varphi\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-(\boldsymbol{x},\varphi\boldsymbol{y})$来定义.

1838. 求两个平面$\boldsymbol{P}_1$：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_0+t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2$和$\boldsymbol{P}_2$：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_0+t_1\boldsymbol{b}_1+t_2\boldsymbol{b}_2$之间的距离，其中$\boldsymbol{a}_0=(2,1,0,1)$，$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1,)$，$\boldsymbol{a}_2=(1,0,0,1)$，$\boldsymbol{b}_0=(1,-1,-1,0)$，$\boldsymbol{b}_1=(1,1,0,-1)$，$\boldsymbol{b}_2=(1,1,2,3)$，并且各向量的坐标是在一标准正交基底下给出的.

1839. 使得级数$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2$收敛的、实数的所有无穷序列$\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots)$的集合$\boldsymbol{V}$，称为Hilbert空间. 这种序列称为空间$\boldsymbol{V}$的向量(或称为点). 向量的加法，向量与一纯量的乘法，向量的纯量积都用通常的方式来定义. 亦即，如果$\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots)$，$\boldsymbol{y}=(b_1,b_2,\cdots)$是向量，而$c$是纯量，则

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots),\ c\boldsymbol{x}=(ca_1,ca_2,\cdots),$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i.$$

证明：

(*a*) $\boldsymbol{V}$是一个无限维欧几里得空间；

(b) 如果 $L^*$ 是 $V$ 中子空间 $L$ 的正交补(习题 1364), 则等式 $V=L\dotplus L^*$ 对有限维的 $L$ 成立;

(c) 用例子证明: 等式 $V=L\dotplus L^*$ 和 $(L^*)^*=L$(参看习题1364和 1365)对于 $V$ 中无限维的子空间可能不成立.

1840. 令 $V_n=L_1\dotplus L_2$ 是 $n$ 维欧几里得空间分解为子空间直接和的分解式. $L_1^*$ 和 $L_2^*$ 分别是 $L_1$ 和 $L_2$ 的正交补, $\varphi$ 是 $V_n$ 平行于 $L_2$ 关于 $L_1$ 的反射. 证明: $\varphi$ 的共轭变换 $\varphi^*$ 是 $V_n$ 的平行于 $L_1^*$ 关于 $L_2^*$ 的反射.

1841. (a) 在平面上,

(b) 在三维空间中,

求保持零向量不动的所有的等距变换(或正交变换).

1842*. 三维欧几里得空间中的线性变换 $\varphi$ 在标准正交基底 $e_1, e_2, e_3$ 下用矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

给出, 试找出变换 $\varphi$ 的几何意义.

1843*. 针对

(a) 直线的情形;

(b) 平面的情形;

(c) 三维空间的情形,

试确定欧几里得空间的斜对称变换 $\varphi$ 的几何意义. 证明: 在三维空间中, $\varphi$ 归结为用同一个向量 $a$ 左乘所有向量, 亦即 $\varphi x=a\times x$.

1844*. 证明下列断言:

欧几里得空间(不必是有限维的)的线性变换 $\varphi$ 是斜对称的必

要充分条件是：$\varphi$ 变每一个向量为正交于这向量的向量.

## §24. 线性函数和线性型. 双线性函数和双线性型. 二次函数和二次型

（对第 15 节的补充）

1845*. 证明：对于定义于 $n$ 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 中的任一非零线性函数 $l(\boldsymbol{x})$，存在一标准基使得在这基底下该函数可以写为标准形式 $l(\boldsymbol{x})=x_1$，其中 $x_1$ 是在该基底下向量 $\boldsymbol{x}$ 的第一个坐标.

1846. 证明：非零双线性型 $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$ 可分解为两个线性型之积 $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=l_1(\boldsymbol{x})\ l_2(\boldsymbol{y})$，其中 $l_1(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i$，$l_2(\boldsymbol{y})=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jy_j$，当且仅当它的秩等于 1.

1847. 证明：在实 $n$ 维空间中（或在特征不为 2 的域上的 $n$ 维空间中）给出的双线性型 $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是对称的，当且仅当它有标准基，使得在这标准基下它可以写为标准形式的双线性型：$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda_1x_1y_1+\lambda_2x_2y_2+\cdots+\lambda_nx_ny_n$.

1848*. 证明：如果定义在线性空间（不必是有限维的）$\boldsymbol{V}$ 上的两个线性函数之积恒等于零，亦即对任一 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$ 有 $l_1(\boldsymbol{x})l_2(\boldsymbol{x})=0$，则至少有一个函数恒等于零.

1849*. 证明：如果在线性空间 $\boldsymbol{V}$（不必是有限维的）中定义的对称双线性函数 $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 分解为两个线性函数 $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=l_1(\boldsymbol{x})\ l_2(\boldsymbol{y})$，则它可以表为 $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda l(\boldsymbol{x})l(\boldsymbol{y})$，其中 $\lambda$ 是非零的数而 $l(\boldsymbol{x})$ 是线性函数.

1850*. 证明：实 $n$ 维空间中的双线性函数的秩为 1 当且仅当在某一基底下，它可以写为如下形式：

(*a*) $\pm x_1y_1$, 如果函数是对称的;

(*b*) $x_1y_2$, 如果函数是非对称的.

1851*. 证明: 线性空间$\boldsymbol{V}$(不必有限维) 上的非零斜对称函数不能分解为两个线性函数的积.

1852*. 令 $l(\boldsymbol{x})$ 是线性空间$\boldsymbol{V}$(不必是有限维) 上的非零线性函数. 证明:

(*a*) 函数 $l(\boldsymbol{x})$的核$\boldsymbol{S}$, 亦即$\boldsymbol{V}$中所有使 $l(\boldsymbol{x})=0$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 的集合, 是极大线性子空间, 亦即, 若$\boldsymbol{T}$是不同于$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{V}$的子空间, 则$\boldsymbol{S}$不含于$\boldsymbol{T}$.

(*b*) 对不在$\boldsymbol{S}$中的任一向量$\boldsymbol{a}$, 任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以唯一地表为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\alpha\boldsymbol{a}$, 其中 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}$.

1853*. 证明: 如果线性空间$\boldsymbol{V}$(不必是有限维) 上的两个线性函数 $l_1(\boldsymbol{x})$和 $l_2(\boldsymbol{x})$有相同的核$\boldsymbol{S}$, 则 $l_1(\boldsymbol{x})=\lambda l_2(\boldsymbol{x})$, 其中数 $\lambda$ 非零.

1854*. 用 Jacobi 方法计算角子式, 在三维空间中确定曲面的仿射类:

(*a*) $x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1+2x_2=0$;

(*b*) $x_1^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1+1=0$.

1855. 证明: 如果矩阵为$A$的二次型是正定的, 则

(*a*) 矩阵为逆矩阵 $A^{-1}$ 的二次型也正定;

(*b*) 矩阵为伴随阵$\hat{A}$的二次型也正定.

1856*. 令 $f(\boldsymbol{x})$ 是实 $n$ 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n$上的二次函数. 如果 $f(\boldsymbol{x}_0)=0$, 则向量 $\boldsymbol{x}_0$称为$f$ 的零向量. 证明: 如果函数 $f(\boldsymbol{x})$是变号函数, 亦即存在向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$使得 $f(\boldsymbol{x}_1)>0$, $f(\boldsymbol{x}_2)<0$, 则存在一个由零向量组成的基底. 试提出一个构造如此基底的方法.

1857*. 二次函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的所有零向量(习题 1856)的集合$\mathbf{K}$称为它的**零锥**. 试证明: 实 $n$ 维空间 $\boldsymbol{V}_n$ 上的二次函数 $f(\boldsymbol{x})$的零

锥是子空间，当且仅当 $f(\boldsymbol{x})$ 是不变号函数，亦即或者 $f(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，对所有 $\boldsymbol{x}$，或者 $f(\boldsymbol{x})\leqslant 0$，对所有 $\boldsymbol{x}$.

1858*. 令 $f(\boldsymbol{x})$ 是实 $n$ 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 上的二次函数，又令 $r$ 是秩，$p$ 和 $q$ 是此函数的正惯性指标和负惯性指标. 证明：含于零锥 $\boldsymbol{K}$(习题 1857) 中的线性子空间的最大维数等于

(a) $\min(p, q)$，如果 $f(\boldsymbol{x})$ 是非奇异的(亦即，$r=n$)；

(b) $n-\max(p, q)=\min(p, q)+n-r$，如果 $f(\boldsymbol{x})$ 是任意的(奇异的或非奇异的).

1859*. 令 $f(\boldsymbol{x})$ 是具有前题性质的二次函数. 证明：含于用方程 $f(\boldsymbol{x})=1$ 所给出的二阶(二次) 曲面 $\boldsymbol{S}$ 中的线性流形 $\boldsymbol{P}$ 的最大维数等于

(a) $\min(p-1, q)$，如果 $f(\boldsymbol{x})$ 是非奇异的；

(b) $\min(p-1, q)+n-r=n-\max(p, q+1)$，在一般情形.

1860. 利用习题 1858 和 1859，求包含于下列二次曲面的线性流形的最大维数(如果空间的维数没指出，则假定它等于坐标的最大下标；空流形的维数取为 $-1$)：

(a) $x_1^2+x_2^2-x_3^2=1$ (单叶双曲面)；

(b) $x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$ (双叶双曲面)；

(c) $x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$；

(d) $x_1x_2=1$；

(e) $x_1x_2=1$ (在三维空间中)；

(f) $x_1x_2=0$；

(g) $x_1x_2=0$ (在 $n$ 维空间中)；

(h) $x_1^2-x_n^2=1$；

(i) $x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2=1$；

(j) $x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2=1$；

(k) $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=1$；

(l) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k^2=1$.

1861* 定义在线性空间$V$上的双线性函数$b(x,y)$的**左核**(或**左零空间**)指的是：对一切$y\in V$使$b(x, y)=0$的所有向量$x\in V$的集合$L_0'$. 类似地定义右核$L_0''$.

证明：

(a) 左核和右核都是子空间；

(b) 在$n$维空间中，左核和右核有相同的维数$n-r$，其中$r$是$b(x,y)$的秩，亦即它关于基底的矩阵的秩.

1862. 对双线性型$b(x, y)=x_1y_1+2x_1y_2+3x_2y_1+6x_2y_2$，求其左核$L_0'$和右核$L_0''$(习题1861)的基底，并证明$L_0'\neq L_0''$.

1863* (a) 证明：对于对称的和斜对称的双线性函数而言，左核与右核相重合；

(b) 在$n$维空间中举出一个双线性函数，使之既不是对称的也不是斜对称的，但其左核与右核相重合.

1864* 证明：在三维空间中，非零斜对称双线性函数可以表为$b(x, y)=a(x)b(y)-a(y)b(x)$，其中$a(x)$和$b(x)$是线性函数.

1865* 令$b(x,y)$是$n$维空间$V_n$中的双线性函数，又令$L$是$V_n$中的一个$k$维子空间. 对一切$x\in L$使得$b(x, y)=0$的所有向量$y\in V_n$的集合，我们用$L^*$表示之. 证明：

(a) $L^*$是子空间；

(b) 如果$b(x,y)$是非奇异的(亦即秩等于$n$)，则$L^*$的维数等于$n-k$；

(c) 如果$b(x,y)$有秩$r<n$，则$L^*$的维数大于或等于$\max(n-k, n-r)$.

1866* 令$b(x, y)$是$n$维线性空间$V_n$中的非零斜对称双线

性函数. 证明: 存在一个基底, 在它之下 $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 可写成下列标准形式的双线性型:

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$$
$$+ \cdots + x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}.$$

对下列各型, 求斜对称双线性型的标准形式(习题 1866)以及化到这形式的那个未知量的非奇异变换.

1867. $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) - x_1y_4 + x_4y_1 - 3(x_2y_4 - x_4y_2)$.

1868. $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) + 4(x_2y_4 - x_4y_2)$.

1869*. 令 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $n$ 维欧几里得空间 $\boldsymbol{V}_n$ 中的二次函数. 试证明下列断言: 方程 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的锥 $\boldsymbol{K}$(习题 1857) 包含空间 $\boldsymbol{V}_n$ 的一个标准正交基底的充分必要条件是: 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在某一标准正交基底下(从而在任一标准正交基底下)的矩阵 $A$ 的迹等于零. 试用矩阵的术语叙述这一命题.

## § 25. 仿射空间(或点-向量空间)

**定义**①. 令有元素 $A, B, C, \cdots$(称为点)的已知集合 $\mathfrak{A}$, 以及元素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \cdots$(称为向量)的线性空间 $\boldsymbol{V}$(在实数域上或任一域 $P$ 上). 而且, 令每一有序的点对 $A, B$(不同的或重合的)对应唯一的向量 $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$; 关于这一对应成立两条公理:

(I) 对任一点 $A$ 及任一向量 $\boldsymbol{x}$, 存在唯一一点 $B$ 使得 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{x}$;

(II) 对任意三点 $A$, $B$, $C$(不必不同)成立等式: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

①这里所给出的仿射空间的定义, 取自 N. V. Efimov 著《高等几何学》莫斯科, 1961 年, 俄文版, 但稍有改变.

$\overrightarrow{AC}$.

集合 $\mathfrak{A}$ 同这种对应一起称为**仿射空间**.

如果 $V=V_n$ 是一个 $n$ 维线性空间，则 $\mathfrak{A}$ 也是一个 $n$ 维的仿射空间并表示为 $\mathfrak{A}_n$. 如果 $V$ 是无限维的，则也称 $\mathfrak{A}$ 是无限维的. 如果线性空间 $V$ 是欧几里得空间，则仿射空间 $\mathfrak{A}$ 也称为欧几里得仿射空间. 此时，点 $A$ 和 $B$ 之间的距离等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，而角 $ABC$ 等于向量 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 间的夹角.

**注** 任一线性空间 $V$ 可以看作一个仿射空间. 此时集合 $\mathfrak{A}$ 与 $V$ 重合，所以向量也被看作点. 我们也说：向量 $x$ 确定出仿射空间的某一点. 在这种情形，有序点对与（在定义中所给定的）向量的对应是：$V$ 中的有序点对 $x$, $y$ 对应着向量 $z=y-x$. 由此，通过 $x$ 和 $z$ 我们可以唯一地决定 $y$；这证实了公理 I. 公理 II 归结为显而易见的等式 $(y-x)+(z-y)=z-x$. 这是在 16 节到 19 节所假定的点和向量的叠合.

仿射空间 $\mathfrak{A}$ 的通过点 $A$ 并且以子空间 $L$ 为方位子空间的平面，指的是：$\mathfrak{A}$ 中使向量 $\overrightarrow{AM}$ 属于 $L$ 的所有点 $M$ 的集合 $\pi$. 平面 $\pi$ 的维数指的是它的方位子空间 $L$ 的维数. 一维的平面称为直线，而 $n$ 维空间的 $n-1$ 维平面则称为**超平面**.

两个平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 称为**平行的**（用 $\pi_1\|\pi_2$ 表示），如果它们不相交（亦即，如果它们没有任何公共点），并且一个平面的方位子空间包含于另一平面的方位子空间之中（或者二者相重合）.

如果某起点 $O\in\mathfrak{A}$ 已被选定，则任一点 $M$ 唯一地被向量 $\overrightarrow{OM}$ 所决定，反之亦然. 向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 $M$ 的**向量径**. 通过点 $A$ 并且有方位子空间 $L$ 的平面 $\pi$，由所有如下的点 $M$ 组成：这些点的向量径由方程 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+x$ 确定，其中 $x\in L$. 如果把 $V$ 中的向量视为点，则平面由等式 $\pi=x_0+L$ 决定，其中 $x_0=\overrightarrow{OA}$. 因而，在这种

情形，平面的概念与§16所提出的线性流形的概念是一致的．通过点$O$的平面便与子空间相重合．

$n$维仿射空间$\mathfrak{A}_n$中的仿射坐标系由点$O\in\mathfrak{A}_n$（称为原点）和相应线性空间$\boldsymbol{V}_n$的基底$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$所组成．点$M\in\mathfrak{A}_n$的**坐标**是它的向量径$\overrightarrow{OM}$在该基底下的坐标，亦即满足等式

$$\overrightarrow{OM}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

的数$x_1, x_2, \cdots, x_n$．

令$n$维实仿射空间的$k$维平面$\pi$通过坐标为$x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$的点$A$，又令平面$\pi$有方位子空间$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{L}$具有坐标为

$$\boldsymbol{c}_i=(c_1^i, c_2^i, \cdots, c_n^i) \qquad (i=1, 2, \cdots, k)$$

的向量所组成的基底．则任一点$M\in\pi$的各坐标由

$$x_i=x_i^0+t_1c_i^1+\cdots+t_kc_i^k \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

给出．

这些方程称为平面$\pi$的参数方程．参数$t_1, t_2, \cdots, t_k$取任意实值．

上述平面$\pi$可以用形式为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n-k) \tag{2}$$

的$n-k$个线性独立方程决定．此处$b_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^0$，而齐次方程$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0(i=1, 2, \cdots, n-k)$决定着子空间$\boldsymbol{L}$．我们把(2)称为平面$\pi$的一般方程．

通过两点$A(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$和$B(y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$的直线的方程形式为

$$x_i=x_i^0+t(y_i^0-x_i^0) \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{3}$$

此处，$t$取遍所有的实数．

以下点$M$的集合称为线段$AB$：点$M$的坐标由（3）在条件$0\leqslant t\leqslant 1$下得到．以比率$\lambda\neq -1$分$AB$的点$M$，在向量的形式下由条件$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$所确定，而在坐标形式下则由

$$x_i=\frac{x_i^0+\lambda y_i^0}{1+\lambda},\quad i=1,2,\cdots,n$$

所确定．

1870*. 在仿射空间中给定4个不同点$A, B, C, D$．点$K, L, M, N$以同一比例$m/n\neq 1$分线段$AB, BC, CD$和$DA$．试证明：

（$a$）如果$ABCD$是平行四边形，则$KLMN$也是平行四边形；

（$b$）如果$KLMN$是平行四边形并且$m\neq n$，则$ABCD$也是平行四边形．

1871. 证明：重合的点对对应着零向量，亦即，$\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}$．

1872. 证明：$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$．

1873. 证明：仿射空间的任一平面$\pi$本身也是一个仿射空间，其维数就等于$\pi$的维数．

1874. 证明：通过点$A$并且具有方位子空间$\boldsymbol{L}$的平面$\pi$，不依赖于其上的点$A$的选取，亦即，$\pi$与下述平面$\pi'$重合：$\pi'$通过$\pi$上的点$A'$并且具有同一个方位子空间$\boldsymbol{L}$．

下列平面用一般方程给出，试求其参数方程：

1875.
$$\begin{aligned}x_1+x_2-2x_3+3x_4&=1,\\x_1+2x_2-x_3+2x_4&=3,\\x_1-x_2-4x_3+5x_4&=-3.\end{aligned}$$

1876.
$$\begin{aligned}2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5&=2,\\6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5&=3,\\6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5&=9,\\4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5&=1.\end{aligned}$$

下列平面用参数方程给出，试求其一般方程：

1877. $x_1=2+t_1+t_2,\quad x_2=1+2t_1+t_2,\quad x_3=-3+t_1+2t_2,\quad x_4=3+3t_1+t_2,\quad x_5=1+t_1+3t_2.$

1878. $x_1=1+t_1+t_2,\quad x_2=2+t_2,\quad x_3=5-t_1+3t_2,\quad x_4=3+2t_1-t_2,\quad x_5=1+3t_1-2t_2.$

1879. 证明：有唯一的一条直线通过仿射空间的任意两个不同的点 $A$ 和 $B$.

1880. 证明：有唯一的一个二维平面通过仿射空间的任何不位于一直线上的三点 $A, B, C$.

1881. 证明：有唯一的一个 $k$ 维平面通过仿射空间的任何不位于一个 $k-1$ 维平面内的 $k+1$ 个点 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_k$.

1882. 在三维空间中，三个不同的平面用一般方程

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

给出，试指出其相互位置的所有情形，并且利用矩阵的秩的概念，对每种情形给出一个充分必要条件.

1883. 使用矩阵的秩的概念，对在三维空间中用一般方程

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\quad a_2x+b_2y+c_2z=d_2,$$

和

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3,\quad a_4x+b_4y+c_4z=d_4$$

给出的两条直线，叙述其相互位置的所有情形.

1884. 用矩阵的秩的概念，对在四维空间中用一般方程

$$\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1, 2) \tag{1}$$

和

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i=3, 4) \tag{2}$$

给出的两个二维平面，指出其相互位置的所有情形。

1885. 对 $n$ 维仿射空间的用一般方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

和

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = d$$

给出的两个超平面，描述其相互位置的所有情形.

1886*. 证明：如果一组平面 $\pi_\alpha$（有限或无限多个）的交 $\pi$ 非空，则 $\pi$ 是一个平面.

1887. 证明：两个平面 $\pi_1 = a_1 + L_1$ 和 $\pi_2 = a_2 + L_2$ 相交当且仅当向量 $a_1 - a_2$ 属于子空间 $L_1 + L_2$.

1888*. 证明：$n$ 维仿射空间的不是一个点的平面 $\pi_1$，平行于不与它相交的任何另一平面 $\pi_2$，当且仅当 $\pi_1$ 是超平面（亦即 $\pi_1$ 的维数是 $n-1$）.

1889*. 证明：$n$ 维仿射空间中的两个不相交的平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 是平行的当且仅当它们位于一个平面 $\pi_3$ 内，$\pi_3$ 的维数比 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的维数中的最大者还大 1.

1890*. 证明：有平行的超平面 $\pi_1'$ 和 $\pi_2'$ 通过 $n$ 维仿射空间的任何不相交的平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$.

1891. 令 $\pi_1 = a_1 + L_1$ 和 $\pi_2 = a_2 + L_2$ 是有限维仿射空间的不相交平面. 求一最小维的平面 $\pi_3$ 使它包含 $\pi_1$ 并且平行于 $\pi_2$.

1892. 证明：如果仿射空间中的一平面 $\pi_0$ 平行于平面 $\pi_\alpha$ 中的每一个，并且平面 $\pi_\alpha$ 的交 $\pi$ 非空，则 $\pi$ 是平行于 $\pi_0$ 的一个平面.

1893. $n$ 维仿射空间中的两个平面用一般方程给出，试用矩

阵的秩的概念表示它们平行的条件.

1894. 一个用一般方程$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$给定的超平面把$n$维仿射空间分割成两个半空间：它们分别由坐标满足不等式$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant b$和$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$的点所组成. 试证明：这两个半空间的每一个都是凸集.

1895*.[①]一多面体$P$作为四维仿射空间的如下点组的凸闭包被给定,所说点组各点的坐标是:

$$O(0,0,0,0), A(1,0,0,0), B(0,1,0,0),$$
$$C(1,1,0,0), D(0,0,1,0), E(0,0,0,1), F(0,0,1,1);$$

(a) 写出一线性不等式组,使这组确定出该多面体$P$;

(b) 求出该多面体的所有的三维表面.

1896. 解与习题 1895 同样的问题,但各点是

$$O(0,0,0,0), A(1,0,0,0), B(0,1,0,0),$$
$$C(0,0,1,0), D(1,1,0,0), E(1,0,1,0),$$
$$F(0,1,1,0), G(1,1,1,0), H(0,0,0,1).$$

1897. 在三维空间中一多面体$P$用下列不等式组给出:

$$x_1 \leqslant 1, x_2 \leqslant 1, x_3 \leqslant 1, x_2 + x_3 \geqslant -1, x_1 + x_3 \geqslant -1,$$
$$x_1 + x_2 \geqslant -1,$$

试求$P$的顶点和形状.

1898. 四维立方体在标准正交坐标系下用不等式$0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i=1,2,3,4$给定. 试求它被平面

(a) $x_1+x_2+x_3+x_4=1$; (b) $x_1+x_2+x_3+x_4=2$;

(c) $x_1+x_2+x_3=1$; (d) $x_1+x_2-x_3-x_4=1$

① 习题 1895 到 1898 是 E. B. Vinberg 提供的.

截得的截面的形状和顶点.

1899*. 域 $Z_2$ 由两个元素 0 和 1 组成，试在域 $Z_2$ 上的三维仿射空间 $\mathfrak{A}_3$ 中，求

(*a*) 所有点的个数；

(*b*) 所有直线的条数；

(*c*) 所有平面的个数；

(*d*) 位于单独一条直线上的点的个数；

(*e*) 穿过同一点的直线的条数；

(*f*) 位于同一平面内的点的个数；

(*g*) 通过同一点的平面的个数；

(*h*) 位于同一平面内的直线的条数；

(*i*) 通过同一直线的平面的个数；

(*j*) 平行于一给定直线的直线的条数；

(*k*) 平行于一给定平面的平面的个数；

(*l*) 平行于一给定平面的直线的条数；

(*m*) 平行于一给定直线的平面的个数；

(*n*) 与给定一直线相错的直线的条数.

## §26. 张 量 代 数①

下面是关于概念和性质的简单介绍，它们通常可在任何一本关于张量代数的教程中找到，一些性质的证明作为本节的习题.

假定在 $n$ 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 中(在实数域上，复数域上，或者在任一域 $\boldsymbol{P}$ 上)有两个给定的基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$. 这

---

① 本节的许多习题由 N. V. Efimov 和 L. A. Skornyakov 提供的. 这是他们 1964 年以来在莫斯科大学数学力学系讲解"线性代数和几何"课程时用到的.

特别，关于张量积的定义和把缩并概念用于张量积(见引言与习题 1918)是根据 Efimov 的教程.

两个基底以下列等式联系着

$$e_1' = c_1^1 e_1 + c_1^2 e_2 + \cdots + c_1^n e_n,$$
$$e_2' = c_2^1 e_1 + c_2^2 e_2 + \cdots + c_2^n e_n,$$
$$e_n' = c_n^1 e_1 + c_n^2 e_2 + \cdots + c_n^n e_n,$$

或者,写成简洁的形式

$$e_i' = c_i^k e_k \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1}$$

这里以及下面,我们假定求和是对上标或下标从1到$n$进行.

我们引进转移矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^n & c_2^n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix},$$

这矩阵的各列是第二个基底各向量关于第一个基底的坐标. 如果转移矩阵用行(而不是用列)来写, 则涉及到矩阵乘法的那些公式有改变,而公式(1)和(2)以及不涉及到矩阵乘法的公式保持不变. 公式(1)可以用矩阵的形式写为一个方程

$$(e_1', e_2', \cdots, e_n') = (e_1, e_2, \cdots, e_n)C.$$

一向量$x$在第一个基底下的坐标同该向量在第二个基底下的坐标之间的关系,借助矩阵$C$的各行用下列公式表达出来: $x^k = c_i^k x'^i$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 由此,用坐标$x^k$表示坐标$x'^i$的公式如下:

$$x'^i = d_k^i x^k, \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

我们引进矩阵

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \cdots & d_1^n \\ d_2^1 & d_2^2 & \cdots & d_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_n^1 & d_n^2 & \cdots & d_n^n \end{pmatrix},$$

其中各列是用$x^k$表达$x'^i$的表达式中的各系数. 公式(2)可以用

矩阵的形式写为下列等式:

$$(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n) = (x^1, x^2, \cdots, x^n)D.$$

另一方面,因为$(x^1, x^2, \cdots, x^n) = (x'^1, x'^2, \cdots, x'^n)C^*$, 故推出:矩阵$C$和$D$用下一等式联系着:

$$D = (C^*)^{-1}. \tag{3}$$

从现在开始, 星号表示矩阵的转置. 如果矩阵$C$和$D$仍由公式(1)和(2)的系数组成,但不是用作列而是用作行,则这两个矩阵变到其转置矩阵,而等式(3)保持不变.

一变化规律如果类似于基底按公式(1)的变化规律,则称为**共变律**. 而公式(2)所对应的变化规律称为**反变律**. 与基底有关且共变的量(或其他对象)称为**共变量**;它们用下标表示;随基底反变的则称为**反变量**且用上标表示.

所谓$n$维线性空间中的**张量**,是一种对应, 在这对应下, 空间的每一基底都对应着$n^{p+q}$个数——带有$p$个下标和$q$个上标的数$a_{i_1 i_2 \cdots i_p}^{j_1 j_2 \cdots j_q}$, 并且随着基底的改变关于各下标是共变的, 而关于各上标是反变的. 这些数称为这张量在该基底下的**分量**, 而数$p+q$称为张量的**秩**或张量的**阶**. 我们也称: 这张量是$p$重共变且$q$重反变的,或称为$(p, q)$型的张量.

依照张量的这一定义,在两个用(1)联系着的基底

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \text{ 和 } \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$$

之下,张量的各分量是用下列等式联系着:

$$a'^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = c_{i_1}^{k_1} c_{i_2}^{k_2} \cdots c_{i_p}^{k_p} d_{l_1}^{j_1} d_{l_2}^{j_2} \cdots d_{l_q}^{j_q} a_{k_1 k_2 \cdots k_p}^{l_1 l_2 \cdots l_q} \tag{4}$$

$$(i_1, i_2, \cdots, i_p, j_1, j_2, \cdots, j_q = 1, 2, \cdots, n).$$

照例, 我们假定求和是从1到$n$对所有的标号$k_s$和$l_t$进行.

张量也可以定义为与线性空间$V_n$有联系的几何对象. 为此我们考虑共轭空间$V_n^*$. $V_n^*$的向量是定义在所给空间$V_n$上的各线性函数$\varphi(\boldsymbol{x})$, 其中两个函数的加法以及一函数与一纯量的乘法

如通常一样. 空间 $V_n^*$ 也是 $n$ 维的, 并且, 对于空间 $V_n$ 的每一个基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 对应着共轭空间 $V_n^*$ 的唯一的一个基底 $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \cdots, \boldsymbol{e}^n$, 后一基底称为空间 $V_n$ 所给基底的**共轭基底**(**或对偶基底**), 并且二者用下列等式联系着:

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j)=\delta_j^i \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n), \tag{5}$$

其中 $\delta_j^i$ 是 Kronecker 符号, 当 $i=j$ 时它等于 1, 而当 $i\neq j$ 时它等于 0.

如果基底 $\boldsymbol{e}_i$ 按公式(1)变换, 则共轭基底 $\boldsymbol{e}^i$ 按以下公式变换:

$$\boldsymbol{e}'^i=d_k^i\boldsymbol{e}^k \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

依赖于 $V_n$ 中 $p$ 个向量和 $V_n^*$ 中 $q$ 个向量的多线性函数

$$F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p; \varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^q),$$

和 $V_n$ 上的 $(p, q)$ 型的所有张量之间可以建立起一对一的对应. 这一对应关于加法、乘法以及数乘运算是同构的.

上述多线性函数所对应的张量在空间 $V_n$ 的基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的分量, 由以下等式确定:

$$a_{i_1i_2\cdots i_p}^{j_1j_2\cdots j_q}=F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_p}; \boldsymbol{e}^{j_1}, \boldsymbol{e}^{j_2}, \cdots, \boldsymbol{e}^{j_q}) \tag{6}$$

$$(i_1, i_2, \cdots, i_p, j_1, j_2, \cdots, j_q=1, 2, \cdots, n).$$

反之, 若一张量在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下有分量 $a_{i_1i_2\cdots i_p}^{j_1j_2\cdots j_q}$, 则与这张量相对应的是由以下等式所决定的多线性函数

$$\begin{aligned}&F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p; \varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^q)\\&=a_{i_1i_2\cdots i_p}^{j_1j_2\cdots j_q}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}u_{j_1}^1u_{j_2}^2\cdots u_{j_q}^q,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $x_s^1, x_s^2, \cdots, x_s^n$ 是向量 $\boldsymbol{x}_s$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的分量(或坐标), 而 $u_1^t, u_2^t, \cdots, u_n^t$ 是向量 $\varphi^t$ 在共轭基底 $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \cdots, \boldsymbol{e}^n$ 下的分量.

此处, 多线性函数在给定向量的值并不依赖于在 $V_n$ 和 $V_n^*$ 中二共轭基底的选取.

由这一对应看来, 空间 $V_n$ 上的张量可以不管基底如何而定

义为空间 $V_n$ 及其共轭空间 $V_n^*$ 的向量的多线性函数.

**所谓二次度量空间(或内积空间)**，是一个 $n$ 维实线性空间 $\boldsymbol{M}_n$，并在其中定义了一个对称的非奇异双线性函数 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，后者称为度量函数．如果它所对应的二次函数 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ 是正定的，则二次度量空间是一个欧几里得空间并表示为 $\boldsymbol{E}_n$．在这种情形，我们写 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 来代替 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，并把该函数的值称为向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的纯量积(内积).

在空间 $\boldsymbol{M}_n$ 中，每一个基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 对应唯一的一个对偶基底 $\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^2,\cdots,\boldsymbol{e}^n$，二者用下列等式联系着:

$$g(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}^j)=\delta_i^j \qquad (i,j=1,2,\cdots,n). \tag{8}$$

空间 $\boldsymbol{M}_n$ 中的每一个向量 $\boldsymbol{x}$ 可依基底 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}^i$ 展开: $\boldsymbol{x}=x^i\boldsymbol{e}_i=x_i\boldsymbol{e}^i$．当基底 $\boldsymbol{e}_i$ 按公式(1)改变时，在该基底下的分量 $x^i$ 按公式(2)变换，亦即反变，并称之为反变分量.

对偶基底 $\boldsymbol{e}^i$ 按公式

$$\boldsymbol{e}'^i=d_k^i\boldsymbol{e}^k \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

变换，而在这基底下的分量 $x_i$ 按公式

$$x_i'=c_i^k x_k \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{10}$$

变换，亦即共变，于是称之为共变分量.

给定一个固定的向量 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{M}_n$，函数 $\varphi_y(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的线性函数，亦即它是共轭空间 $\boldsymbol{M}_n^*$ 中的一个元素．对应 $\boldsymbol{y}\to\varphi_y(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{M}_n$ 到 $\boldsymbol{M}_n^*$ 上的一个同构映射．当把这两个空间在同构下彼此对应的元素视为同一时，我们可以说空间 $\boldsymbol{M}_n^*$——与二次度量空间 $\boldsymbol{M}_n$ 共轭的空间——与 $\boldsymbol{M}_n$ 相重合．特别说来，对欧几里得空间而言这是对的.

在内积空间 $\boldsymbol{M}_n$ 里，$\boldsymbol{M}_n$ 中 $r$ 个向量的同一个多线性函数可以视为 $(p,q)$ 型的一个张量，其中 $p+q=r$，$p=0,1,2,\cdots,r$．为此，选取 $p$ 的一个可能值，用类似于(6)的公式确定张量在给定基 $\boldsymbol{e}_i$ 下

的各分量，其中 $e^i$ 是以公式(8)和基 $e_i$ 联系着的对偶基．反过来，用给定的$(p, q)$型的张量，我们以类似于(7)的公式定义所对应的多线性函数在给定向量的值．此处，公式(6)和(7)中的 $\varphi^1$，$\varphi^2, \cdots, \varphi^q$ 理解为同一空间 $M_n$ 中的向量．

特别地，度量函数 $g(x, y)$ 对应于分量各为

$$g_{ij}=g(e_i, e_j) \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n). \tag{11}$$

$$g^{ij}=g(e^i, e^j) \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{12}$$

的两个张量，它们分别称为共变度量张量和反变度量张量．这两个张量分别是(2, 0)型的和(0, 2)型的．此外，同一函数 $g(x, y)$ 还对应着第三个(1, 1)型的张量，这张量的分量用公式(8)给定，并且不依赖于基底 $e_i$ 的选取．

度量函数 $g(x, y)$ 的值为下列三公式之一所决定：

$$g(x, y)=g_{ij}x^iy^j, \tag{13}$$

$$g(x, y)=g^{ij}x_ix_j, \tag{14}$$

$$g(x, y)=x_iy^i. \tag{15}$$

特别地，欧氏空间中的纯量积同样地计算．

假定，在欧几里得空间中，我们只考虑标准正交基．此时由公式(1)的系数所组成的矩阵 $C$ 是正交的，从(3)我们得到 $D=C$，由公式(1)和(2)的系数所组成的矩阵互为转置，对偶基底与原始基底相重合，共变分量与反变分量相重合，度量张量 $g_{ij}$ 和 $g^{ij}$ 的矩阵变成一个矩阵．在这种情形，与 $p+q$ 个变量的给定多线性函数相对应的所有$(p, q)$型的张量相重合．张量的共变和反变阶之间差异无关紧要．因此，所有的指标可以写为下标但要保持所需的求和记号．

在欧几里得空间 $E_n$ 中，假定我们有任一基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$；用 $g$ 表示共变度量张量在给定基底下的矩阵 $G=(g_{ij})$ 的行列式．因为 $g(x, x)$ 是正定的二次函数，故推出 $g>0$．

所谓欧几里得空间 $E_n$ 的**判别(共变)张量**是一个对应,在这对应之下每一个基底对应于由以下公式给出的一组数(张量的分量):

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = (-1)^s \sqrt{g}, \tag{16}$$

其中 $s$ 是排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中的反序数. 如果至少有两个指标相同,则 $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = 0$. 特别地, $\varepsilon_{12\cdots n} = \sqrt{g} > 0$.

当变到相同定向的新基底时, 判别张量的分量的变化跟 $n$ 重共变张量的分量一样;当变到相反定向的基底时,它们也变号.

类似地可以定义反变判别张量 $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}$.

所谓由空间 $E_n$ 的向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 所形成的平行多面体 $Q$ 的有向体积, 是在给定基底 $\boldsymbol{e}_i$ 下由下列公式所决定的数(纯量):

$$V_e(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sqrt{g} \cdot \det_e(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n), \tag{17}$$

其中 $\sqrt{g} > 0$, 而 $\det_e(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ 是由向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 在给定基底下的坐标(分量)所组成的行列式. 用判别张量, 有向体积可用下面公式表达:

$$V_e(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \tag{18}$$

其中 $x_i^s$ 是向量 $\boldsymbol{x}_i$ 在给定基底下的第 $s$ 个分量.

有向体积变为零当且仅当向量 $\boldsymbol{x}_i$ 是线性相关的. 对于线性无关的 $\boldsymbol{x}_i$, 它的绝对值等于平行多面体 $Q$ 的体积, 而它是正还是负随向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 与基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的定向是相同还是相反来定.

**张量乘积.** 令 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{V}'$ 是同一域 $P$ 上的两个线性空间. 我们考虑向量的有序对 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$, 其中 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ 而 $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{V}'$, 以及这种对的形式的有限和: $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1' + \cdots + \boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k'$. 我们现在用下列规则确定这些和的等价关系:(1)仅是被加项次序不同的两个和是等价的;(2)$(\alpha\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}(\alpha\boldsymbol{x}')$ 是等价的, 其中 $\alpha \in P$; (3)对 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}'$ 等价于对的和 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}'$, 并且对 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}')$ 等价于对的和 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}'$.

两个和，如果把上述规则运用于整个一个和或和的一部分上去有限次，我们从一个和变到另一个和，则这两个和是等价的．这种等价关系是自反的，对称的和可递的．因此，可以把所有的和分为等价和类．令$\boldsymbol{T}$是这些类的集．我们用对各类代表的运算，在$\boldsymbol{T}$中引进加法运算和乘以域$P$中元素的运算．两个和的和是一个和，它是把第二个和的项附加于第一个和而得到的．一个和乘以$\alpha\in P$的乘法定义为用$\alpha$乘所给和的所有对的第一个元素．例如，$\alpha(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}')=(\alpha\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}'+(\alpha\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}'$.

在这些运算之下，集$\boldsymbol{T}$是域$P$上的一个线性空间．它称为空间$\boldsymbol{V}$和$\boldsymbol{V}'$的**张量乘积**并表示为$V\times V'$．如果$\boldsymbol{V}$和$\boldsymbol{V}'$是有限维的，则$\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}'$也是有限维的，并且它的维数等于$\boldsymbol{V}$和$\boldsymbol{V}'$的维数之积．如果$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$是$\boldsymbol{V}$的基底而$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_{n'}$是$\boldsymbol{V}'$的基底，则等价和包含有序对

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}'_j(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n') \tag{19}$$

的类的组是空间$\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}'$的一个基底(参看习题 1918).

用类似的方法，我们可以定义任何有限多个线性空间的张量乘积．

定义于空间$\boldsymbol{V}_n$上的$(p, q)$型的张量可以视为空间$\boldsymbol{T}$的向量，其中$\boldsymbol{T}$是$q$个空间$\boldsymbol{V}_n$和$p$个共轭空间$\boldsymbol{V}_n^*$的张量乘积．为此，我们在$\boldsymbol{V}_n$中取基底$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$并在$\boldsymbol{V}_n^*$中取共轭基底$\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \cdots, \boldsymbol{e}^n$．则有序组

$$\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\cdots\boldsymbol{e}_{j_q}\boldsymbol{e}^{i_1}\boldsymbol{e}^{i_2}\cdots\boldsymbol{e}^{i_p} \tag{20}$$

组成空间$\boldsymbol{T}$的一个基底，其中所有的指标从 1 变到 $n$. $\boldsymbol{T}$中的一个向量$t$用这基底表示为

$$t=\alpha^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p}\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\cdots\boldsymbol{e}_{j_q}\boldsymbol{e}^{i_1}\boldsymbol{e}^{i_2}\cdots\boldsymbol{e}^{i_p}.$$

它的分量，亦即数$\alpha^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p}$是在张量第一个定义意义下$(p, q)$型张量在基底$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$下的分量.

1900. 证明：对 $n$ 维线性空间 $V_n$ 的任一基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，存在共轭空间 $V_n^*$ 的唯一的共轭基底 $\boldsymbol{e}^1, \cdots, \boldsymbol{e}^n$，亦即与给定基底由条件 $\boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{e}_i)=\delta_i^j(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 相联系的基底，其中 $\delta_i^j$ 是 Kronecker 符号.

1901. $n$ 维线性空间 $V_n$ 上的线性函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 是共变张量，亦即(1, 0)型的张量.

(a) 在给定基底 $\boldsymbol{e}_i$ 下求它的各分量 $a_i$.

(b) 证明：把 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 看作共轭空间 $V_n^*$ 的向量，则诸数 $a_i$ 是 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在基底 $\boldsymbol{e}^i$ 下的分量，其中 $\boldsymbol{e}^i$ 共轭于 $V_n$ 的基底 $\boldsymbol{e}_i$.

1902. 向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $n$ 维线性空间 $V_n$ 的给定基底下的分量(坐标)确定出一个反变张量，亦即(0, 1)型的张量. 用多线性函数的形式写出这一张量.

1903. 令 $\varphi(\boldsymbol{x})=a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 是向量 $\boldsymbol{x}\in V_n$ 在基底 $\boldsymbol{e}_i$ 下各分量的线性型. 证明：该型平方的系数 $a_ia_j(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 产生一个二阶共变张量.

1904. 我们称下一矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为二阶共变张量 $a_{ij}$ 在给定基底下的矩阵. 求当变到新基底时矩阵 $A$ 的变化规律.

1905. 我们称下列矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \cdots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \cdots & a^{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n1} & a^{n2} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

为二阶反变张量 $a^{ij}$ 在给定基底下的矩阵. 求当变到新基底时矩阵 $A$ 的变化规律.

1906. 令 $a_i^j$ 是 $n$ 维线性空间 $V_n$ 的(1, 1)型的张量. 假定 $i$ 是列的号数而 $j$ 是行的号数, 则我们得到由张量的分量组成的矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

求当变到新基底时矩阵 $A$ 的变化规律.

1907. (a) 证明: Kronecker 符号 $\delta_i^j$ 在 $n$ 维线性空间的任何基底下都产生一个(1, 1)型的张量; (b)以多线性函数的形式写出这一张量.

1908*. 令 $a_{ij}$ 是 $n$ 维空间的二阶共变张量. 证明:

(a) 如果在一基底下张量 $a_{ij}$ 的矩阵 $A$ 是非奇异的, 则在任一基底下它也是非奇异的.

(b) 张量 $a_{ij}$ 的 $A$ 的逆的元素 $a^{ij}$(对 $A$ 是非奇异的情形而言)形成一个二阶反变张量.

1909. 令 $Ax$ 是线性变换, 又令 $\varphi(x)$ 是 $n$ 维线性空间 $V_n$ 上的线性函数. 证明: 函数 $F(x;\varphi)=\varphi(Ax)$ 是(1, 1)型的张量, 它在任一基底下的矩阵与线性变换 $Ax$ 在同一基底下的矩阵重合.

1910. 证明: $n$ 维线性空间中的双线性函数 $F(x, y)$ 的矩阵的元素形成一个(2, 0)型的张量, 也就是一个二阶共变张量.

1911. 证明: 线性变换在给定基底下的矩阵的元素形成一个(1, 1)型的张量.

1912. 在 $n$ 维线性空间 $V_n$ 中给定了 $p$ 个向量 $x_1, x_2, \cdots, x_p$. 按矩阵的行写出各向量在某基底下的坐标(分量):

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_p^1 & a_p^2 & \cdots & a_p^n \end{pmatrix}.$$

(*a*) 证明：数

$$a^{i_1 i_2 \cdots i_p} = \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_1^{i_2} & \cdots & a_1^{i_p} \\ a_2^{i_1} & a_2^{i_2} & \cdots & a_2^{i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_p^{i_1} & a_p^{i_2} & \cdots & a_p^{i_p} \end{vmatrix} \quad (i_1, i_2, \cdots, i_p = 1, 2, \cdots, n)$$

是一个 $p$ 重反变张量的分量，亦即一个 $(0, p)$ 型张量在给定基底下的分量. 这张量称为 $p$ 重向量(当 $p=1$ 它是一个向量，当 $p=2$ 它是一个二重向量).

(*b*) 证明：$p$ 重向量是零当且仅当所给定的向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ 是线性相关的(特别地，当 $p>n$ 时，所有的 $p$ 重向量都是零).

(*c*) 证明：由 $p$ 个向量组成的两个线性无关组是等价的当且仅当对应的 $p$ 重向量仅差一个非零因子.

(*d*) 证明：如果把张量视为多线性函数(参看本节引言)，则由空间 $\boldsymbol{V}_n$ 的向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ 所定出的 $p$ 重向量，可以定义为共轭空间 $\boldsymbol{V}_n^*$ 的 $p$ 个向量 $\varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^p$ 的由下列方程所定出的多线性函数：

$$\boldsymbol{F}(\varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^p) = \begin{vmatrix} \varphi^1(\boldsymbol{x}_1) & \varphi^2(\boldsymbol{x}_1) & \cdots & \varphi^p(\boldsymbol{x}_1) \\ \varphi^1(\boldsymbol{x}_2) & \varphi^2(\boldsymbol{x}_2) & \cdots & \varphi^p(\boldsymbol{x}_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^1(\boldsymbol{x}_p) & \varphi^2(\boldsymbol{x}_p) & \cdots & \varphi^p(\boldsymbol{x}_p) \end{vmatrix}.$$

1913. 当从基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 变到基底 $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_n'$ 时，试确定 $(p, q)$ 型张量的分量如何变化，其中后一基底是由前一基底用置换 $\pi(i) = k_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 所得到的. 这也就是 $\boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{e}_{\pi(i)} (i=1, 2, \cdots, n)$.

1914. 关于基底 $e_1, \cdots, e_n$, 求用方程

$$F(x_1, \cdots, x_n; \varphi^1, \cdots, \varphi^n) = \begin{vmatrix} \varphi^1(x_1) & \varphi^2(x_1) & \cdots & \varphi^n(x_1) \\ \varphi^1(x_2) & \varphi^2(x_2) & \cdots & \varphi^n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^1(x_n) & \varphi^2(x_n) & \cdots & \varphi^n(x_n) \end{vmatrix}$$

给定的$(n, n)$型张量的分量.

1915. 令 $F(x_1, \cdots, x_n; \varphi^1, \cdots, \varphi^n)$是多线性函数, 它关于变数 $x_1, \cdots, x_n$ 和变数 $\varphi^1, \cdots, \varphi^n$ 都是斜对称的. 证明: 它的值可以通过在给定基底下的各分量用下列公式表达:

$$F(x_1, \cdots, x_n; \varphi^1, \cdots, \varphi^n) = \det(x)\det(\varphi)\cdot F(e_1, \cdots, e_n; e^1, \cdots, e^n),$$

其中 $e^i$ 是基底 $e_i$ 的共轭基底, $\det(x)$是由向量 $x_1, \cdots, x_n$ 在基底 $e_1, \cdots, e_n$ 下的分量所组成的行列式, 而 $\det(\varphi)$ 是由向量 $\varphi^1, \cdots, \varphi^n$ 在基底 $e^1, \cdots, e^n$ 下的分量所组成的行列式.

1916. 以多线性函数 $F(x_1, \cdots, x_p; \varphi^1, \cdots, \varphi^q)$的形式给定了一个$(p, q)$型的张量. 下列和

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_1, \cdots, x_{k-1}, e_i, x_{k+1}, \cdots, x_p; \varphi^1, \cdots, \varphi^{l-1}, e^i, \varphi^{l+1}, \cdots, \varphi^q)$$

称为关于标号 $k\leqslant p$, $l\leqslant q$ 的**缩并**. 证明: 缩并不依赖于基底, 并是一个$(p-1, q-1)$型的张量. 假定 $p, q>0$.

1917. 给定了一个对称张量 $a_{ij}$ 和一个斜对称张量 $b^{ij}$. 求它们的完全缩并 $a_{ij}b^{ij}$.

1918*. 在研究张量乘积(参看本节引言)时, 利用在下述意义下的缩并概念是便利的. 为了简单起见, 我们考虑两个线性空间的张量乘积: $T=V\times V'$, 其中 $V$ 和 $V'$ 是同一域 $P$ 上的线性空间.

所谓和 $x_1x_1'+\cdots+x_kx_k'$ 关于空间 $V^*$ 的向量 $\varphi$ 的缩并($x_i\in V$, $x_i'\in V'$, $i=1, 2, \cdots, k$; $V^*$ 是 $V$ 的共轭空间), 是向量 $\alpha_1x_1'+\cdots$

$+\alpha_k \boldsymbol{x}'_k \in \boldsymbol{V}'$，其中 $\alpha_i=\varphi(\boldsymbol{x}_i)\in P(i=1,2,\cdots,k)$．类似地，我们可以定义上述和关于向量 $\varphi'\in \boldsymbol{V}'^*$ 的缩并；它是 $\boldsymbol{V}$ 中的向量．

(a) 证明：如果上述类型的两个和是等价的，则它们的缩并是相等的．这允许我们对 $t\in \boldsymbol{T}, \varphi\in \boldsymbol{V}^*$ 确定缩并 $\varphi(t)\in \boldsymbol{V}'$．

(b) 为使对 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$ 等价于对 $\mathbf{0}\mathbf{0}'$，其中 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{0}'$ 分别是 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{V}'$ 中的零向量，必要且充分的条件是下列条件至少有一个成立：$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{x}'=\mathbf{0}'$．

(c) 如果 $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}'_1+\cdots+\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}'_k\sim \mathbf{0}\mathbf{0}'$，且向量 $\boldsymbol{x}'_1,\cdots,\boldsymbol{x}'_k$ 是线性无关的，则

$$\boldsymbol{x}_1=\cdots=\boldsymbol{x}_k=\mathbf{0}.$$

(d) 包含对 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}'_j(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n')$ 的等价和类构成 $\boldsymbol{T}$ 的一个基底，其中 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个基底，而 $\boldsymbol{e}'_1,\cdots,\boldsymbol{e}'_{n'}$ 是 $\boldsymbol{V}'$ 的一个基底．

1919．证明：系数在域 $P$ 中的关于 $x$ 的所有多项式的线性空间和关于 $y$ 的所有多项式的线性空间的张量乘积，是系数在 $P$ 中的关于这两个未知量 $x,y$ 的所有多项式的空间．

1920．证明：系数在域 $P$ 中的次数 $\leqslant n$ 的多项式 $f(x)$ 的空间和次数 $\leqslant s$ 的多项式 $g(y)$ 的空间的张量乘积，是系数取自域 $P$、关于 $x$ 次数 $\leqslant n$ 的、关于 $y$ 次数 $\leqslant s$ 的多项式 $h(x,y)$ 的空间．

1921．证明下列各断言：

(a) 对于 $n$ 维欧几里得空间 $\boldsymbol{E}_n$（或者内积空间 $\boldsymbol{M}_n$）的任一基底 $\boldsymbol{e}_i$ 存在空间 $\boldsymbol{E}_n$（相应地，空间 $\boldsymbol{M}_n$）的唯一的对偶基底 $\boldsymbol{e}^i$，它和给定基底之间用以下等式联系着：$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}^j)=\delta_i^j(i,\ j=1,2,\cdots,n)$［相应地，用本节引言中等式(8)联系着］；

(b) 对偶基底可以通过已给基底用如下公式表示：$\boldsymbol{e}^i=g^{i\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha$ $(i=1,2,\cdots,n)$；

(c) 已给基底可以通过对偶基底用如下公式表示：$\boldsymbol{e}_i=g_{i\alpha}\boldsymbol{e}^\alpha$

$(i=1, 2, \cdots, n)$;

(d) 度量张量 $g_{ij}$ 和 $g^{ij}$ 用等式

$$g_{i\alpha}g^{j\alpha}=\delta_i^j \ (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

联系着;

(e) 如果我们用 $G=(g_{ij})_1^n$ 和 $G_1=(g^{ij})_1^n$ 表示度量张量的矩阵，并用 $g=|g_{ij}|_1^n$ 和 $g_1=|g^{ij}|_1^n$ 表示这二矩阵的行列式，则 $GG_1=E, gg_1=1$.

1922. 证明: 在欧几里得空间的给定基底下同一个向量的共变和反变分量，用下列等式相联系:

(a) $x_i=g_{i\alpha}x^\alpha \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$;

(b) $x^i=g^{i\alpha}x_\alpha \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$.

1923. 在笛卡尔直角坐标系中给定两个向量:

$$e_1=(1, 0), e_2=(\cos\alpha, \sin\alpha), \sin\alpha\neq0;$$

(a) 证明这两个向量构成基底;

(b) 在基底 $e_1, e_2$ 下求共变度量张量 $g_{ij}$;

(c) 在基底 $e_1, e_2$ 下求反变度量张量 $g^{ij}$;

(d) 对于对偶基的向量 $e^1$, $e^2$, 求用基底 $e_1$, $e_2$ 表示的表达式，以及 $e^1, e^2$ 在原来的直角坐标系中的分量;

(e) 用两向量 $x, y$ 在基底 $e_1, e_2$ 下的分量，写出二向量纯量积$(x, y)$的表达式;

(f) 在基底 $e_1, e_2$ 下求判别张量 $\varepsilon_{ij}$;

(g) 对于由向量 $x, y$ 形成的平行四边形的有向面积，写出用判别张量 $\varepsilon_{ij}$ 和在基底 $e_1$, $e_2$ 下的分量组成的行列式所表示的表达式.

1924*. 令 $e_1, e_2$ 是平面的任一基底，令 $g^{ij}$ 是反变度量张量，又令 $\varepsilon_{ij}$ 是该基底下的判别张量. 用已给向量 $x=x^ie_i$ 构成向量 $y=y^ie_i$, 其中 $y^i=g^{ij}\varepsilon_{jk}x^k$. 试确定向量 $y$ 怎样依赖于基底的选

取. 向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的几何关系是什么?

1925. 在四维欧几里得空间中, 我们有一个二阶反变张量 $a^{kl}$. 随着基底的改变, 量 $b_{ij}=\varepsilon_{ijkl}a^{kl}(i, j=1, 2, 3, 4)$ 如何变化?

1926* 在 $n$ 维欧几里得空间 $E_n$ 的某基底下, 假定我们有一个(3, 0)型的张量 $a_{ijk}$, 又假定 $g_{ij}$ 和 $g^{ij}$ 是度量张量. 用等式 $a_k^{ij}=g^{i\alpha}g^{j\beta}a_{\alpha\beta k}(i, j, k=1, 2, \cdots, n)$ 定义(1, 2)型的张量 $a_k^{ij}$. 试用 $a_k^{ij}$ 表示 $a_{ijk}$.

1927. 三维欧几里得空间用矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & 10 & 1\\ 1 & 1 & 6\end{pmatrix}$ 的度量张量所定义. 试求在各坐标轴上被平面 $\frac{x^1}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{5}=1$ 所截得的线段的长.

1928* 三维欧几里得空间的度量用矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 6 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ 的度量张量 $g_{ij}$ 所给定. 试求顶点为 $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, 1, 2)$ 的三角形的面积 $S$ 以及从 $C$ 引向 $AB$ 的高 $h$, 假定坐标和张量都是在同一基底下给出的.

1929* 三维欧几里得空间用矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$ 的度量张量 $g_{ij}$ 所给出. 试求从点 $P(1, -1, 2)$ 到平面 $x^1+x^2+2x^3+2=0$ 的垂线 $PQ$ 的垂足.

1930* 在四维欧几里得空间 $E_4$ 中我们给定三个向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$, 又我们构造一个具有共变分量 $u_i=\varepsilon_{ijkl}x^jy^kz^l(i=1, 2, 3, 4)$ 的向量 $\boldsymbol{u}$, 其中 $\varepsilon_{ijkl}$ 是同一基底下的判别张量(对于向量积的四维类比参看习题 1938). 试证明:

(*a*) 向量 $\boldsymbol{u}$ 正交于向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 中的每一个;

(*b*) 如果向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 是线性无关的, 则向量 $\boldsymbol{u}$ 的长 $|\boldsymbol{u}|$ 等于由 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 构成的平行多面体的三维体积 $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$; 如果 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 是线性相关的, 则 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$.

1931. 求 $n$ 维欧几里得空间 $\boldsymbol{E}_n$ 中的度量张量的完全缩并 $g_{ij}g^{ij}$.

1932. 我们用公式 $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} = (-1)^s \sqrt{g_1}$ 定义 $n$ 维欧几里得空间 $\boldsymbol{E}_n$ 的反变判别张量, 其中 $g_1 = |g^{ij}|_1^n$, $s$ 是排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中的反序数, 如果指标 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中至少有两个重合, 则令 $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} = 0$. 试证明:

(*a*) 由向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 构成的平行多面体的有向体积(参看本节引言)可以用下列等式表示

$$V_e(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sqrt{g_1}\, \det{}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$
$$= \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 \cdots x_{i_n}^n,$$

其中 $\det_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ 是由向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 的共变分量所组成的行列式, 而 $x_i^s$ 是向量 $\boldsymbol{x}_s$ 的第 $i$ 个共变分量;

(*b*) $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} = g^{i_1 \alpha_1} g^{i_2 \alpha_2} \cdots g^{i_n \alpha_n} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$;

(*c*) $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = g_{i_1 \alpha_1} g_{i_2 \alpha_2} \cdots g_{i_n \alpha_n} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$.

1933. 计算三维欧几里得空间的判别张量 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}$ 的缩并.

1934. 在三维实空间的基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 下, 共变度量张量 $g_{ij}$ 用矩阵

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

给出.

(*a*) 证明这空间是欧几里得空间;

(*b*) 求反变度量张量 $g^{ij}$ 的矩阵 $G_1$;

(c) 设一平面在同一基底下用方程 $3x^1+2x^2-3x^3-5=0$ 给定，求这平面的法线的单位向量的反变分量.

1935*. 证明：由 $n$ 维欧几里得空间中 $n$ 个向量所构成的平行多面体的有向体积的平方，等于这些向量的 Gram 行列式.

1936. 在 $n$ 维欧几里得空间中，给定用方程 $a_1x^1+\cdots+a_nx^n+b=0$ 定义的超平面 $\pi$. 又给定一点 $M(x_0^1, \cdots, x_0^n)$.

(a) 证明：共变分量为 $a_1, \cdots, a_n$ 的向量 $\boldsymbol{p}$ 与平面 $\pi$ 垂直；

(b) 证明：从点 $M$ 到平面 $\pi$ 的距离 $d$ 可用下列公式表示：

$$d=\frac{|a_1x_0^1+\cdots+a_nx_0^n+b|}{|\boldsymbol{p}|}.$$

1937*. 求从欧几里得平面上的点 $M(x_0, y_0)$ 到直线 $ax+by+c=0$ 的距离，如果分量是在以下基底下给出的：$\boldsymbol{e}_1=\{1, 0\}$，$\boldsymbol{e}_2=\{\cos\omega, \sin\omega\}$，$\sin\omega\neq 0$，(基底向量的分量是在一笛卡尔直角坐标系下给出的).

1938*. 令 $\varepsilon_{ijk}$ 是三维欧几里得空间的判别张量，又令 $x^i$，$y^i$ 是向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 在某基底下的反变分量. 证明：在同一基底下共变分量为 $z_i=\varepsilon_{i\alpha\beta}x^\alpha y^\beta (i=1, 2, 3)$ 的向量 $\boldsymbol{z}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的向量积.

# 答　　案

## 第一章　行　列　式

1. 1. 2. $-2$. 3. $-1$. 4. 0. 5. 0. 6. $-1$. 7. $4ab$. 8. $-2b^3$. 9. 1. 10. $\sin(\alpha-\beta)$. 11. $\cos(\alpha+\beta)$. 12. 0. 13. 1. 14. 1. 15. $-1$. 16. 1. 17. 0. 18. $ab-c^2-d^2$. 19. $(a-b)^2$. 20. 0. 21. $a^2+b^2+c^2+d^2$. 22. $x=3$; $y=-1$. 23. $x=5$; $y=2$. 24. $x=\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{3}$. 25. $x=2$; $y=-3$. 26. $x=\cos(\beta-\alpha)$; $y=\sin(\beta-\alpha)$. 27. $x=\cos\alpha\cos\beta$; $y=\cos\alpha\sin\beta$.

28. 组不定，Cramer 公式不能给出正确答案，因为按这公式 $x$ 和 $y$ 等于 $\frac{0}{0}$，即它们可取任意值，但它们以关系式 $2x+3y=1$ 相联系着，由此，按一个未知数的值可决定另一未知数的唯一值。

29. 组不相容。

30. 当 $a\neq b$ 时，方程是有定的；当 $a=b\neq c$ 时，矛盾；当 $a=b=c$ 时，不定。

31. 当 $\alpha=k\pi$ 时，其中 $k$ 为整数，方程矛盾；当 $\alpha$ 是其他值时，是有定的。

32. 当 $\alpha=2k\pi$ 时，其中 $k$ 是整数，方程矛盾；当 $\alpha=(2k+1)\pi$ 时，不定；对其他 $\alpha$ 值，方程是有定的。

33. 当 $\alpha+\beta\neq k\pi$ 时，其中 $k$ 是整数，方程是有定的；当 $\alpha+\beta=2k\pi$ 和当 $\alpha+\beta=(2k_1+1)\pi$, $\alpha=k_2\pi$ 时，其中 $k_1$ 和 $k_2$ 是整数，不定；当 $\alpha+\beta=(2k_1+1)\pi$, $\alpha\neq k_2\pi$ 时，矛盾。

34. 当 $a\neq 0$，组有定；当 $a=b=0$，不定；当 $a=0\neq b$，矛盾。

35. 当 $ac-b^2\neq 0$，组有定；当 $ac-b^2=0$，不定；不可能矛盾。

36. 当 $a\neq\pm 6$ 时，组有定；当 $a=6$ 时，不定；当 $a=-6$ 时，矛盾。

37. 当 $ab\neq 90$，组有定；当 $a=6$, $b=15$，不定；当 $ab=90$，但 $a\neq 6$, $b\neq 15$ 时，矛盾。

39. **提示**. 确信：在二次方程求解公式中根号下的表达式是正的.

40. **解**. 令给定的三项式是完全平方，即 $ax^2+2bx+c=(px+q)^2$. 比较 $x$ 的同次幂的系数，得到 $a=p^2$，$b=pq$，$c=q^2$，由此 $ac-b^2=p^2q^2-(pq)^2=0$. 反过来，再令 $ac-b^2=0$. 此时

$$ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}(a^2x^2+2abx+ac)$$

$$=\frac{1}{a}[(ax+b)^2+(ac-b^2)]$$

$$=\frac{1}{a}(ax+b)^2$$

是完全平方，因为复数$\frac{1}{a}$可以开平方.

42. **解**. 如果$\frac{ax+b}{cx+d}=q$对任何 $x$ 成立，则 $ax+b=q(cx+d)$，$a=qc$，$b=qd$ 和 $ad-bc=0$. 反之，如果 $ad-bc=0$，则当 $c\neq0\neq d$ 时，有$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=q$，$a=qc$，$b=qd$. 当 $c=0\neq d$，就有 $a=0$，令 $q=\frac{b}{d}$，又有 $a=qc$，$b=qd$. 当 $c\neq0=d$ 也有同样结果，只须令 $q=\frac{a}{c}$. 因此，对任何 $x$，$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{q(cx+d)}{cx+d}=q$.

43. 40. 44. $-3$. 45. 100. 46. $-5$. 47. 0. 48. 1. 49. 1. 50. 2. 51. 4. 52. $-8$. 53. 6. 54. 20. 55. 0. 56. $3abc-a^3-b^3-c^3$. 57. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 58. 0. 59. $2x^3-(a+b+c)x^2+abc$. 60. $(ab+bc+ca)x+abc$. 61. $1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. 62. 1.

63. $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$.

64. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1$. 66. $-2$.

67. $xyz-2(ace-bcf-adf+bde)-x(e^2+f^2)-y(c^2+d^2)-z(a^2+b^2)$.

68. 0. 69. $-3$. 70. $3i\sqrt{3}$.

72. 4. **提示**. 行列式的六项不能全等于$+1$. 否则，三项 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$ 的积就将等于其余三项的乘积，然而这是不可能的，因为第一个乘积等于行列式所有 9 个元素的积，第二个乘积则等于行列式所有 9 个元素之积带上负号. 其次，容易看出行列式不能等于 5，又

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

73. 2. **提示**. 指明：行列式中三个正项不能全等于 1，并考虑到

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

74. $x=3$, $y=-2$, $z=2$. 75. $x=y=z=1$. 76. $x=1, y=2, z=-1$. 77. $x=2$, $y=-3$, $z=-2$. 78. $x=-a$, $y=b$, $z=c$. **提示**. 置 $\frac{x}{a}=x'$; $\frac{y}{b}=y'$, $\frac{z}{c}=z'$.

79. $x=bc$, $y=ac$, $z=ab$.

80. $x=a$, $y=2b$, $z=3c$. **提示**. 用 $abc$ 除每一个方程，并置 $\frac{x}{a}=x'$, $\frac{y}{b}=y'$, $\frac{z}{c}=z'$.

81. $x=\frac{a+b+c}{3}$, $y=\frac{a+b\varepsilon^2+c\varepsilon}{3}$, $z=\frac{a+b\varepsilon+c\varepsilon^2}{3}$. **提示**. 可按 Cramer 公式解这组. 更简单的是：先把所有方程加起来，然后用 $\varepsilon^2$ 乘第二个方程、用 $\varepsilon$ 乘第三个方程再加起来，最后，用 $\varepsilon$ 乘第二个方程、用 $\varepsilon^2$ 乘 第三个方程再加起来；利用关系式 $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$.

82. 组不定，因为第三个方程是其余两个方程的和，这意味着，前两个方程的任何解也满足第三个方程. 前两个方程有无穷多个解，例如，$x$ 和 $y$ 可用 $z$ 表达如下：$x=10z+1$, $y=7z$. 给 $z$ 以任意一个值，就求得 $x$ 和 $y$ 的一个值.

83. 组不定.

84. 组矛盾，因为假若在未知数的某些值下组的所有方程变成等式，则从后两个等式之和中减去第一个等式，应该得到等式. 但却得到 $0=4$.

85. 矛盾.

86. 当 $a^3\neq 27$ 时有定，当 $a^3=27$ 时矛盾.

87. 当 $4a^3-45a+58\neq 0$时有定；当 $4a^3-45a+58=0$ 时矛盾.

88. 当 $ab\neq 15$ 时组有定；当 $a=3, b=5$ 时不定；当 $ab=15$，但 $a\neq 3$, $b\neq 15$ 时矛盾.

89. 当 $ab\neq 12$ 时组是有定的；当 $a=3, b=4$ 时不定；当 $ab=12$，但 $a\neq 3, b\neq 4$ 时矛盾.

99. **提示**. 考察三行列式：其前两行不成比例(特别地，这两行之任一行不应只包含零)，而第三行等于前两行之和，即第三行的每一元素为前两行对应元素之和.

100. 0. 101. 0. 102. 0. 103. 0. 104. 0. 105. 0. 106. 0. 107. 0. 108. 0.

109. 0. 平面的两点$(x_1, y_1)$和$(x_2, y_2)$位于具有如下分点的一条直线上：该分点分上述两点之间的线段为给定比 $\lambda$.

110. 0. **提示**. 把第二行和第三行加到第一行，并利用韦达公式.

120. **提示**. 在等式左端的行列式中，将第二列乘以 $a+b+c$ 加于第三列，第一列乘以 $ab+bc+ca$ 后由第三列减去.

123. 5. 124. 8. 125. 13. 126. 18.

127. $\frac{n(n-1)}{2}$. 128. $\frac{n(n+1)}{2}$.

129. $\frac{3n(n-1)}{2}$个反序. 当 $n$ 等于 $4k$, $4k+1$ 时是偶排列，当 $n$ 等于 $4k+2$, $4k+3$ 时是奇排列，其中 $k$ 是任何非负整数.

130. $\frac{3n(n+1)}{2}$个反序. $n=4k$, $4k+3$ 时是偶排列，$n=4k+1$, $4k+2$ 时是奇排列，其中 $k$ 是任何非负整数.

131. $\frac{n(3n+1)}{2}$个反序. $n=4k$, $4k+1$ 时是偶排列，$n=4k+2$, $4k+3$ 时是奇排列，其中 $k$ 是任何非负整数.

132. $\frac{n(3n-1)}{2}$个反序. $n=4k$, $4k+3$ 时，是偶排列，$n=4k+1$, $4k+2$ 时是奇排列，其中 $k$ 是任何非负整数.

133. $3n(n-1)$个反序. 对任何 $n$，排列是偶排列.

134. $n(3n-2)$个反序. 排列的奇偶性与 $n$ 的奇偶性相同.

135. $n(5n+1)$个反序. 对任何 $n$，排列是偶排列.

136. 排列是 $n$, $n-1$, $n-2$, $\cdots$, 3, 2, 1. 它的反序数等于 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$.

137. $k-1$. 138. $n-k$. 139. $C_n^2$.

140. 对 $n=4k$, $4k+1$, 相同, 而对 $n=4k+2, 4k+3$, 相反. 其中 $k$ 是任何非负整数.

141. **解**. 在给定排列中任取两个元素 $a_i$, $a_j$ $(i<j)$. 如果在给定排列中, 这两个元素组成正序, 则在初始位置中 $a_i$ 居于 $a_j$ 之前, 而下标 $i, j$ 将构成正序. 假如在给定排列中元素 $a_i, a_j$ 组成反序, 则在初始位置中 $a_j$ 居于 $a_i$ 之前, 因此它们的下标 $j, i$ 也构成反序.

因此, 给定排列的反序一对一地对应于在这些元素的标准位置下其下标的排列的反序, 这意味着它们的反序数彼此相同.

142. **提示**. 在排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中把元素 $b_1$ 移到第一个位置, 在所得的排列中把 $b_2$ 移到第二个位置, 等等.

143. 例如: $2, 3, 4, \cdots, n, 1$, 或者 $n, 1, 2, \cdots, n-1$. **提示**. 在证明时利用: 一个对换, 可以减少"在给定排列中的位置比在标准排列中的位置往右(往左)的元素"数, 不多于一个.

144. **提示**. 在排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中用邻接对换把元素 $b_1$ 移到第一个位置, 在所得排列中用邻接对换把元素 $b_2$ 移到第二个位置, 等等.

145. $C_n^2-k$.

146. $\frac{1}{2}n!C_n^2$. **提示**. 利用前题.

147. **提示**. 用邻接对换把 1 移到第一个位置, 然后把 2 移到第二个位置, 等等, 并考虑到: 一个邻接对换改变反序数为 1.

148. **提示**. 考虑从排列 $1, 2, \cdots, n$ 开始用以下一系列对换所得到的一串排列: 首先, 把 1 与它右边的每一个数交换位置而把 1 移到最后位置上去; 然后, 用同样方法把 2 移到倒数第二个位置, 等等, 直到得到排列 $n, n-1, \cdots, 2, 1$ 为止.

也可以用对于数 $k$ 的归纳法来证明该论断.

149. **解**. 为导出递推关系式, 我们注意: 如果在具有 $k$ 个反序的排列中, 数 $n+1$ 居于最后位置, 则所有 $k$ 个反序全由数 $1, 2, \cdots, n$ 所构成, 而这样的排列有 $(n, k)$ 个; 如果 $n+1$ 居于倒数第二个位置, 则它自己组成一个反序, 而数 $1, 2, \cdots, n$ 构成 $k-1$ 个反序, 而这样的排列有 $(n, k-1)$ 个, 等等; 最后, 如果 $n+1$ 居于第一个位置, 则它构成 $n$ 个反序(这只在 $k\geqslant n$ 时可能), 而数 $1, 2, \cdots, n$ 构成 $k-n$ 个反序, 而这样的排列有 $(n, k-n)$ 个.

把 $(n, k)$ 排列成表, 给定的 $n$ 按行, 给定的 $k$ 按列, 由递推关系式可得: 第

$(n+1)$行的每一个数等于前行这样 $n+1$ 个数的和，即所求数上方那个数往左数 $n+1$ 个数的和（等于零的数也计算在内）．为了计算位置的方便，也把当 $j>C_n^2$ 时等于零的值 $(n, j)$ 写全；考虑到 $(1,0)=1$，当 $j\geqslant 1$ 时 $(1, j)=0$，便得到值 $(n, k)$ 的表如下：

| $n$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 3 | 5 | 6 | 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 4 | 9 | 15 | 20 | 22 | 20 | 15 | 9 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 5 | 14 | 29 | 49 | 71 | 90 | 101 | 101 | 90 | 71 | 49 | 29 | 14 | 5 | 1 |

例如，6 个元素的具有 7 个或 8 个反序的排列数等于 101．

150．**提示．**在所有的排列中以倒逆的位置代替给定的位置．

151．(142)(35)．减量等于 3，是奇置换．

152．(163)(25)(4)．是奇置换．

153．(182)(3)(467)(5)．是偶置换．

154．(15)(2864)(397)．是偶置换．

155．(123456789)．是偶置换．

156．(14)(25)(36)．是奇置换．

157．$(12)(34)\cdots(2n-1, 2n)$．减量等于 $n$．置换的奇偶性与数 $n$ 的奇偶性相同．

158．$(13)(2)(46)(5)\cdots(3n-2, 3n)(3n-1)$．减量等于 $n$．置换的奇偶性与数 $n$ 的奇偶性相同．

159．$(1, 3, 5, \cdots, 2n-1)(2, 4, 6, \cdots, 2n)$．减量等于 $2n-2$．是偶置换．

160．$(1, 2, 3)(4, 5, 6)\cdots(3n-2, 3n-1, 3n)$．减量等于 $2n$．是偶置换．

161．$(1, 4, 7, \cdots, 3n-2)(2, 5, 8, \cdots, 3n-1)(3, 6, 9, \cdots, 3n)$．减量等于 $3n-3$．置换的奇偶性与数 $n$ 的奇偶性相反．

162．$(1, k+1, 2k+1, \cdots, nk-k+1)(2, k+2, 2k+2, \cdots, nk-k+2)\cdots(k, 2k, 3k, \cdots, nk)$．减量等于 $nk-k$．当 $k$ 是偶数以及当 $k$ 和 $n$ 是奇数时，

置换是偶置换．当$k$是奇数而$n$是偶数时，则为奇置换．

163. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

164. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

165. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

166. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n\\ 2 & 1 & 4 & 3 & \cdots & 2n & 2n-1\end{pmatrix}$.

167. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n\\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n & 1\end{pmatrix}$.

168.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 3n-2 & 3n-1 & 3n\\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & \cdots & 3n & 3n-2 & 3n-1\end{pmatrix}.$$

169. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

170. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

172. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

173. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

176. $A$. **提示**. 利用上一习题.

177. 恒等置换$E$.

178.

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

181. **提示**. 把置换的第一行数排成增加次序，并在第二行中用一系列对换把恒等置换变到所给定的置换.

182. **提示**. 为证明等于减量个对换的乘积这种分解式的存在，用包含于同一个轮换中的数构成的对换乘置换，并利用习题 180．为证明对换个数

最少，注意到：当乘以一个对换时，减量的增加不能多于1.

183. **提示.** 如果 $P=P_1P_2\cdots P_s$ 是置换 $P$ 的任一分解成对换的分解式，则利用等式

$$P=\begin{pmatrix} a_1, a_2, \cdots, a_n \\ a_1, a_2, \cdots, a_n \end{pmatrix}\cdot P_1P_2\cdots P_s$$

和习题179和182.

184. **解.** 如果 $X$ 是与 $S$ 可换的置换，则 $SX=XS$，由此 $X^{-1}SX=S$. 分解 $S$ 成轮换 $S=(1,2)(3,4)=X^{-1}(1,2)XX^{-1}(3,4)X$. 用直接计算断定：$X^{-1}(1,2)X$ 也是一个长为2的轮换，这轮换的两个元素就是在置换 $X$ 中数1和2所对应的那两个. 对轮换(3,4)也有同样的结论. 所以，置换 $X$ 应当把 $S$ 中的轮换变为同样长的轮换，而由于将 $S$ 分解成轮换的唯一性，轮换或者把每一个变为自己，或者把一个变为另一个. 因为每一个长为2的轮换可以有两种记法 $(1,2)=(2,1)$，$(3,4)=(4,3)$，于是所有与 $S$ 可换的置换是：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

185. 所求的置换是：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&2&5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&4&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&4&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&2&3\end{pmatrix}.$$

186. **提示.** 证明：数 $1, 2, \cdots, m-1$ 中的任何一个都不变为零且不同的数变为不同的数.

187. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&6&2&7&3&8&4\end{pmatrix}$.

188. 带负号. 189. 带正号. 190. 不是行列式的项. 191. 带负号. 192. 不是行列式的项. 193. 带符号 $(-1)^{n-1}$. 194. 带符号 $(-1)^n$.

195. 带符号 $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

196. 带符号 $(-1)^{3n}=(-1)^n$. 197. $i=5, k=1$. 198. $i=6, k=2$.

199. $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.  200. $10x^4-5x^3$.  201. 带正号. 202. 带符号$(-1)^{C_n^2}$.  203. $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.

204. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

205. 0. 207. 数 $a_1$、$a_2$、…、$a_n$ 是根. **提示**. 利用论断: $n$ 次多项式不能有多于 $n$ 个不相同的根. 208. $x=0,1,2,\cdots,n-1$.  209. $a_{n-k+1,n-i+1}$. 210. $a_{n-i+1,n-k+1}$. 211. 如果 $n$ 是偶数, 则位于偶位置和奇位置的元素个数是相同的且等于$\frac{1}{2}n^2$. 如果 $n$ 是奇数, 则偶位置的元素个数等于$\frac{1}{2}(n^2+1)$, 而奇位置的元素个数是$\frac{1}{2}(n^2-1)$.

212. 行列式乘以$(-1)^{n-1}$.

213. 行列式乘以$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

214. 行列式不变.

215. 行列式不变. **提示**. 该变换可以换成关于水平中线和铅直中线的两个对称以及关于主对角线的一个对称.

216. **提示**. 转置行列式. 217. **提示**. 转置行列式.

218. $n=4m$, 其中 $m$ 是整数. 219. $n=4m+2$, 其中 $m$ 是整数.

221. 行列式乘以$(-1)^n$.

222. 行列式不变. **提示**. 考察行列式的一般项.

223. **提示**. 考察包含于行列式一般项中的所有元素的下标和.

224. **提示**. 利用前题. 229. 行列式变为零.

230. 如果行列式是偶数阶的, 则变为零; 如果行列式是奇数阶的, 则增加一倍. **提示**. 按每一列展开为行列式的和.

231. 行列式乘以$(-1)^{C_n^2}$. 232. 行列式等于零.

233. 这种行列式的个数等于 $n!$. 它们的和等于零.

234. 0. 236. $8a+15b-12c-19d$. 237. $2a-8b+c+5d$. 238. $abcd$. 239. $abcd$. 240. $xyzuv$. 243. 0.

244. **提示**. 分别用 $yz$, $xz$, 和 $xy$ 乘等式左端行列式的第二, 第三和第四列.

245. **提示**. 利用 Vieta 公式变换第 $n$ 列.

246. **提示**. 利用Vieta公式, 变换第 $n$ 列并把它移到第$(i+1)$个位置.

247. **提示**. 按第一列展开. 253. **提示**. 按第三行展开.

256. **提示**. 归到前题.

257. 8. 258. $-3$. 259. $-9$. 260. 18. 261. 18. 262. 4. 263. 90. 264. 27. 265. 17. 266. 6. 267. $-10$. 268. 100. 269. 150. 270. 52. 271. 5. 272. 10. 273. 1. 274. 100. 275. 1.

276. $\frac{1}{35}$. **提示**. 将每一行的元素化到公分母并将其提出行列式之外.

277. 1. 278. $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. 279. $n!$.

280. $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

281. $x_1(x_2-a_{12})(x_3-a_{23})\cdots(x_n-a_{n-1,n})$.

282. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}b_1b_2\cdots b_n$. 283. $2n+1$.

284. $(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)x^n$.

285. $x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right)$. **提示**. 从第 $i$ 列将 $x_i$ 提出行列式之外然后对每一列加上它后面的所有各列.

286. 1. 287. $n(-1)^{n-1}$. 288. $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. **提示**. 从每一行减去前一行,然后把最后一列加到其余各列.

289. $(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

290. $(-1)^n(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$.

291. $a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$.

292. $(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c)$.

293. $(x^2-1)(x^2-4)$.

294. $x^2z^2$. **提示**. 调换前两行以及前两列后,证明:当用 $-x$ 替换 $x$ 时行列式不变. 验证:当 $x=0$ 时行列式变为零后,证明:它能被 $x^2$ 除尽. 对 $z$ 进行同样的推理.

295. $a_1b_n\prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}b_i-a_ib_{i+1})$.

**提示**. 得出关系式

$$D_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)D_{n-1}.$$

296. $a_0x_1x_2x_3\cdots x_n+a_1y_1x_2x_3\cdots x_n+a_2y_1y_2x_3\cdots x_n+\cdots+a_ny_1y_2y_3\cdots y_n$.

**提示**. 得出关系式 $D_{n+1}=x_nD_n+a_ny_1y_2\cdots y_n$. 行列式可按第一行展开而另行计算.

297. $a_1a_2\cdots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$.

298. $a_1a_2\cdots a_n-a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_1+(-1)^n$.

299. $n+1$. 300. $2^{n+1}-1$.

301. $\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$. 302. $9-2^{n+1}$.

303. $5\cdot 2^{n-1}-4\cdot 3^{n-1}$. 304. $\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

305. $x^n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^{n-1}$. **提示**. 把主对角线之外的元素表成形式 $a_i=0+a_i$.

306. $(x_1-a_1)(x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n)\left(1+\frac{a_1}{x_1-a_1}+\frac{a_2}{x_2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n-a_n}\right)$.

**提示**. 令 $x_i=(x_i-a_i)+a_i$.

307. $(a_1-x_1)(a_2-x_2)\cdots(a_n-x_n)-a_1a_2\cdots a_n$. **提示**. 在左上角置 $0=1-1$ 并关于第一行把行列式表为两个行列式之和的形式.

308. $(x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)\cdots(x_n-a_nb_n)\left(1+\frac{a_1b_1}{x_1}+\frac{a_2b_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_nb_n}{x_n}\right)$.

309. $(n-1)!$. 310. $b_1b_2\cdots b_n$.

311. $(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}}2(n-2)!$. 312. $(-1)^{n-1}n!$.

313. $x^n+(-1)^{n+1}y^n$. 314. 0. 315. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n+1)^{n-1}$.

316. $(-1)^{n-1}(n-1)$. 317. $(2n-1)(n-1)^{n-1}$.

318. $[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$. 319. 1. 320. 1.

321. $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. 322. $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$.

323. $\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}-\frac{n+1}{x-1}$.

324. $\frac{nx^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)^2}$.

325. $\prod_{k=1}^{n}(1-a_{kk}x)$.

326. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^na_n]$.

327. $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$. 328. $1!2!3!\cdots n!=1^n 2^{n-1}3^{n-2}\cdots n$.

329. $\prod_{k=1}^{n} k!$. 330. $\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

331. $\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n+1}(a_i-a_k)$.

332. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}\cos\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

333. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}\sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

334. $\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

335. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1,0}a_{2,0}\cdots a_{n-1,0}\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}\sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

336. $\frac{1}{1!2!3!\cdots(n-1)!}\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

337. $(-1)^n 1!2!\cdots n!$.

338. $\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i-1}\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

339. $1!3!5!\cdots(2n-1)!$.

340. $\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n+1}(a_ib_k-a_kb_i)$.

341. $\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}\sin(\alpha_i-\alpha_k)$.

342. $a_1a_2\cdots a_n\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n+1}(x_iy_k-x_ky_i)$，其中 $a_i$ 是多项式 $f_i(x,y)$ 中 $x_i$ 的系数.

343. $(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}x_i\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_if'(x_i)}\right]$，其中 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. **提示.** 按第一行展开行列式.

344. $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$. **提示.** 用两种方法计算行

列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & z & z^2 & \cdots & z^n \end{vmatrix},$$

即按最后一行展开和把它看作 Vandermonde 行列式展开. 在两个展开式中使 $z^{n-1}$ 的系数相等.

345. $x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\prod\limits_{n\geq i>k\geq 1}(x_i-x_k)$.

346. $(\sum x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\cdots x_{\alpha_{n-s}})\prod\limits_{n\geq i>k\geq 1}(x_i-x_k)$, 其中求和取遍数 $1, 2, \cdots, n$ 中 $n-s$ 个数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-s}$ 的所有组合.

347. $[x_1x_2\cdots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)]\prod\limits_{n\geq i>k\geq 1}(x_i-x_k)$. **提示.** 将第一列的第 $i$ 个元素表为 $1=x_i-(x_i-1)$, 并将行列式表为两个行列式之差.

348. $[2x_1x_2\cdots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)]\prod\limits_{n\geq i>k\geq 1}(x_i-x_k)$. **提示.** 添写上第一行 $1, 0, 0, \cdots, 0$ 和由 1 组成的第一列, 将第一列从其他列中减去, 将左上角的 1 表成 $2-1$, 并将行列式关于第一行表为两个行列式之差.

349. $2^{(n-1)^2}\prod\limits_{1\leq i<k\leq n}\sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$. **提示.** 利用: $\cos k\varphi$ 用 $\cos\varphi$ 表达为具有最高项 $2^{k-1}\cos^k\varphi$ 的多项式形式(这可从棣模佛 (De Moivre) 公式和等式 $1+C_k^2+C_k^4+\cdots=2^{k-1}$ 推出).

350. $2^{n(n-1)}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_n\prod\limits_{1\leq i<k\leq n}\left(\sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}\right)$. **提示.** 证明: $\sin k\varphi$ 可以表为 $\sin\varphi$ 与具有最高项 $2^{k-1}\cos^{k-1}\varphi$ 的 $\cos\varphi$ 的多项式之积的形式.

351. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$. **提示.** 利用分离线性因子的方法.

352. $(a+b+c+d+e+f+g+h)(a+b+c+d-e-f-g-h)$

$\times(a+b-c-d+e+f-g-h)(a+b-c-d-e-f+g+h)$

$\times(a-b+c-d+e-f+g-h)(a-b+c-d-e+f-g+h)$

$\times(a-b-c+d+e-f-g+h)(a-b-c+d-e+f+g-h)$.

353. $(x+a_1+a_2+\cdots+a_n)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. **提示.** 应用分离线性因子,或者从每一行减去前一行并对每一列加上后面各列.

354. 0 当 $n>2$; $D_1=a_1-b_1$; $D_2=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$.

355. 0 当 $n>2$; $D_1=1+x_1y_1$; $D_2=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$.

356. 0 当 $n>1$. **提示.** 关于每一列展开为行列式之和.

357. $1+\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_i-a_k)(b_k-b_i)$.

358. $(-1)^n\left[1-n-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(x_i-x_k)(y_i-y_k)\right]$. **提示.** 应用习题 355 的结果.

359. $x^n+x^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)+x^{n-2}\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$. **提示.** 关于每一列展开行列式为两个行列式之和并应用习题 354 的结果.

360. $x_1x_2\cdots x_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i}\right)$.

361. $(a^2-b^2)^n$. **提示.** 导出递推关系式 $D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2n-2}$.

362. $\prod_{i=1}^{n}(a_ia_{2n+1-i}-b_ib_{2n+1-i})$.

363. $\frac{n+1}{x^n}$.

364. 0, 如果当 $n$ 除以 6 时给出余数 2 或者 5; 1, 如果 $n$ 被 6 整除或者余数为 1; $-1$, 如果当 $n$ 除以 6 时给出余数 3 或者 4. 答案可另写为:

$$D_n=\frac{C_{n+1}^1-3C_{n+1}^3+9C_{n+1}^5-27C_{n+1}^7+\cdots}{2^n}.$$

**提示.** 应用本节引言中讨论过的递推关系式法.

365. **提示.** 得出递推关系式 $D_n=D_{n-1}+D_{n-2}$.

366. $5^{n+1}-4^{n+1}$.

367. $\frac{i^n[1+(-1)^n]}{2}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，即如果 $n$ 是奇数，则 $D_n=0$，如果 $n$ 是偶数，则 $D_n=(-1)^{\frac{n}{2}}$.

368. $\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$.　　369. $D_n=\frac{1}{2^n}[C_{n+1}^1a^n+C_{n+1}^3a^{n-2}(a^2-4)+C_{n+1}^5a^{n-4}(a^2-4)^2+C_{n+1}^7a^{n-6}(a^2-4)^3+\cdots]=a^n-C_{n-1}^1a^{n-2}+C_{n-2}^2a^{n-4}-\cdots+(-1)^kC_{n-k}^ka^{n-2k}+\cdots$. **提示**. 第一个表达式用递推关系式方法直接得到；第二个容易用归纳法证明，同时利用关系式 $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$.

370. $D_n=\frac{1}{2^n}[C_{n+1}^1a^n+C_{n+1}^3a^{n-2}(a^2+4)+\cdots+C_{n+1}^{2k+1}a^{n-2k}(a^2+4)^k+\cdots]=a^n+C_{n-1}^1a^{n-2}+C_{n-2}^2a^{n-4}+\cdots+C_{n-k}^ka^{n-2k}+\cdots$.

371. $2\cos n\alpha=(2\cos\alpha)^n-n(2\cos\alpha)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2!}(2\cos\alpha)^{n-4}$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}(2\cos\alpha)^{n-6}+\cdots=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k(2\cos\alpha)^{n-2k},$$

其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示数 $\frac{n}{2}$ 的整数部分. **提示**. 用对 $n$ 的归纳法证明 $\cos n\alpha$ 等于该行列式.

其次，如果 $D_n$ 是本习题的行列式，而 $D_n^0$ 是习题 369 中将 $a$ 换成 $2\cos\alpha$ 的行列式，则 $D_n=D_n^0-\cos\alpha D_{n-1}^0$. 在用 $\cos\alpha$ 表达 $\cos n\alpha$ 的式中的系数是整数这一事实，由容易检验的等式

$$\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k=C_{n-k}^k+C_{n-k-1}^{k-1}$$

以及下列事实推出：除最后一项外所有的项包含因子 2，而最后一项仅在偶数 $n$ 的情形不包含 $2\cos\alpha$，但此时 $k=\frac{n}{2}$ 且这项等于 2.

372. $\sin n\alpha=\sin\alpha[(2\cos\alpha)^{n-1}-C_{n-2}^1(2\cos\alpha)^{n-3}+C_{n-3}^2(2\cos\alpha)^{n-5}$
$-C_{n-4}^3(2\cos\alpha)^{n-7}+\cdots]$

$$=\sin\alpha\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^kC_{n-k-1}^k(2\cos\alpha)^{n-2k-1},$$

其中 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 是数 $\frac{n-1}{2}$ 的整数部分.

373. **提示**. 应用递推关系式法.

374. $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$.

375. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}$.

376. $(-nx)^{n-1}\left[a+\frac{(n-1)x}{2}\right]$. **提示**. 从每一行减去下一行，将所有的列加于最后一列，将所有前面的各行加于倒数第二行然后将这一行加于所有前面各行.

377. $(1-x^n)^{n-1}$.

378. 这两个循环行列式只差因子$(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$.

379. 1. **提示**. 利用等式$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$，从每一列减去前一列，然后从每一行减去前一行.

380. 1. **提示**. 利用前题的提示.

381. 1. **提示**. 从每一行减去前一行.

382. 1. **提示**. 从第二行开始，从每一行减去前一行，然后从第三行开始，从每一行减去前一行，等等.

383. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. **提示**. 从第二列开始，从每一列减去前一列，然后从第三列开始，从每一列减去前一列，等等. 在所得的行列式中对行同样进行.

384. 1. **提示**. 利用习题 382 的提示.

385.

$$\frac{\binom{m+n}{n+1}\binom{m+n-1}{n+1}\cdots\binom{m+n-p+1}{n+1}}{\binom{p+n}{n+1}\binom{p+n-1}{n+1}\cdots\binom{n+1}{n+1}}.$$

**提示**. 利用关系式

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$$

从第一行将$m$提到行列式之外，从第二行提$m+1$，等等，从最后一行提$m+n$；从第一列提$\frac{1}{p}$，从第二列提$\frac{1}{p+1}$等等，从最后一列提$\frac{1}{p+n}$. 对所得到的行列式进行类似的变换，等等，直到化为与前面习题同一类型的行列式.

386. $n$. **提示**. 从每一行减去前一行，按第一列的元素展开，在所得到

的行列式中从第一列减去第二列，加上第三列，减去第四列，等等。把行列式表为两个行列式之和的形式并证明：$D_n=D_{n-1}+1$.

387. $n$. **提示**. 从每一列减去前一列，然后从每一行减去前一行。将左上角的元素 2 表为 $1+1$；此时得到关系式 $D_{n-1}=D_{n-2}+D'_{n-1}$，其中 $D'_{n-1}$ 是与习题 379 同一类型的行列式，但阶为 $n-1$.

388. $(x-1)^n$. **提示**. 从每一行减去前一行并证明：$D_{n+1}=(x-1)D_n$.

389. $1!2!3!\cdots(n-1)!(x-1)^n$. **提示**. 把这道题归结为前题.

390. $x_n-\binom{n}{1}x_{n-1}+\binom{n}{2}x_{n-2}-\binom{n}{3}x_{n-3}+\cdots+(-1)^nx_0$. **提示**. 从每一行减去前一行，证明：$D_{n+1}(x_0,x_1,\cdots,x_n)=D_n(x_1-x_0,x_2-x_1,\cdots,x_n-x_{n-1})$，并应用数学归纳法.

391. $(-1)^{n-1}xy\dfrac{x^{n-1}-y^{n-1}}{x-y}$. **提示**. 在右下角置 $0=x-x$，分解成两个行列式并且或者应用递推关系式法，或者从下两个等式中求出 $D_n$:

$$D_n=-xD_{n-1}+x(-y)^{n-1},\quad D_n=-yD_{n-1}+y(-x)^{n-1}.$$

392. $\dfrac{x(a-y)^n-y(a-x)^n}{x-y}$.

393. $\dfrac{xf(y)-yf(x)}{x-y}$，其中 $f(z)=(a_1-z)(a_2-z)\cdots(a_n-z)$.

394. $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$，其中 $f(z)=(a_1-z)(a_2-z)\cdots(a_n-z)$.

395. $\alpha^n+\beta^n$. 396. $a^n+a^{n-1}+\cdots+a+1$.

397. $n!(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n)$.

398. $\dfrac{\operatorname{tg}^n\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^n\dfrac{\alpha}{2}}{2}$.

399. $\prod_{k=1}^{n}(x+n-2k+1)$ 或者 $(x^2-1^2)(x^2-3^2)\cdots[x^2-(n-1)^2]$，如果 $n$ 是偶数；$x(x^2-2^2)(x^2-4^2)\cdots[x^2-(n-1)^2]$，如果 $n$ 是奇数. **提示**. 对每一行加上所有后面各行，从每一列中减去前一列并证明：如果 $D_n(x)$ 是给定的行列式，则 $D_n(x)=(x+n-1)D_{n-1}(x-1)$.

400. 0，如果 $n>2$；$D_1=a^p-x$；$D_2=xa^p(a^2-1)(1-a)$.

401. $(-1)^n\left[x^n-x^{n-1}\dfrac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right]$.

402. $a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n}\right)$.

403. $abc_1c_2\cdots c_n\left(\frac{c}{ab}-\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}-\cdots-\frac{1}{c_n}\right)$.

404. $a(a+b)(a+2b)\cdots[a+(n-1)b]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+(n-1)b}\right)$. **提示.** 从第二行开始的每一行，减去后一行，从头一行减去最后一行就得出与前题同一类型的行列式.

405. $\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i^2-2a_ix_i}\right]\prod_{i=1}^{n}(x_i^2-2a_ix_i)$. **提示.** 利用习题 306 的结果.

406.

$$\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i^2-2a_ix_i}\right]\prod_{i=1}^{n}(x_i^2-2a_ix_i).$$

407. $1-b_1+b_1b_2-b_1b_2b_3+\cdots-(-1)^n b_1b_2\cdots b_n$. **提示.** 得出关系式 $D_n=1-b_1D_{n-1}$.

408. $(-1)^{n-1}(b_1a_2a_3\cdots a_n+b_1b_2a_3\cdots a_n+\cdots+b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n)$.

409. $(-1)^{n-1}x^{n-2}$. **提示.** 从每一行减去下一行.

410. $(-1)^n[(x-1)^n-x^n]$. **提示.** 从每一行减去前一行，在右下角置 $1=x+(1-x)$ 并把行列式表为两个行列式之和.

411. $a_0x^n\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$. **提示.** 用 $x^{n-1}$ 乘第二行、用 $x^{n-2}$ 乘第三行、等等，用 $x$ 乘第 $n$ 行. 从第一列提出 $x^n$，从第二列提出 $x^{n-1}$，从第三列提出 $x^{n-2}$，等等，从第 $n$ 列提出 $x$.

412. $n!\left(1+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\cdots+\frac{x}{n}\right)$.

413. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[1+x\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\right]$.

414. $\frac{1}{n!}\left[1+\frac{n(n+1)}{2}x\right]$.

415. $a^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[1+x\frac{a^{n+1}-1}{a^n(a-1)}\right]$.

416. $\dfrac{\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}[(a_i-a_k)(b_i-b_k)]}{\prod\limits_{i,k=1}^{n}(a_i+b_k)}$，其中分母中的乘积是彼此独立地取遍从 1 到 $n$ 的所有值的一切 $i$、$k$. **提示.** 从每一行中提出这行元素的公分母. 证明：所得到的行列式 $D'$ 被形式如 $a_i-a_k$ 和 $b_i-b_k(i\neq k)$ 的所有的差整除. 证明：用 $\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}[(a_i-a_k)(b_i-b_k)]$ 除 $D'$ 的商是常数；为了确定这常数，在 $D'$ 中置

$$a_1=-b_1,\quad a_2=-b_2,\cdots,a_n=-b_n.$$

可以另行解之：从每一行减去第一行，然后从每一列减去第一列.

417. $\dfrac{\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}[(x_i-x_k)(a_k-a_i)]}{\prod\limits_{i,k=1}^{n}(x_i-a_k)}$. **提示.** 利用前题的提示.

418. $\dfrac{[1!2!3!\cdots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!(n+2)!\cdots(2n-1)!}$. **提示.** 利用习题 416 的结果.

419. $a_0a_1a_2\cdots a_n\left(\dfrac{1}{a_0}+\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$. **提示.** 利用递推关系式

$$D_n=(a_{n-1}+a_n)D_{n-1}-a_{n-1}^2D_{n-2},$$

并应用数学归纳法.

420. 连分行列式 $(a_1a_2\cdots a_n)$ 等于元素 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_n$ 的下列所有可能的乘积之和：其中有一项包含所有这些元素，而其他项则是从这项去掉一个或一些具有相邻号码的因子对所得到的. 同时，去掉所有因子（当 $n$ 是偶数时）所得到的项认为它等于 1；

$$(a_1a_2a_3a_4)=a_1a_2a_3a_4+a_3a_4+a_1a_4+a_1a_2+1,$$

$$\begin{aligned}(a_1a_2a_3a_4a_5)=&a_1a_2a_3a_4a_5+a_3a_4a_5+a_1a_4a_5\\&+a_1a_2a_5+a_1a_2a_3+a_1+a_3+a_5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_1a_2a_3a_4a_5a_6)=&a_1a_2a_3a_4a_5a_6+a_3a_4a_5a_6\\&+a_1a_4a_5a_6+a_1a_2a_5a_6+a_1a_2a_3a_6\\&+a_1a_2a_3a_4+a_5a_6+a_3a_6\\&+a_1a_6+a_3a_4+a_1a_4+a_1a_2+1.\end{aligned}$$

**提示.** 对一阶和二阶的连分行列式验证上述规律正确. 假定对 $(n-1)$ 阶

和$(n-2)$阶的连分行列式它是正确的，证明它对$n$阶连分行列式的正确性．为此，导出递推关系式

$$(a_1a_2\cdots a_n)=a_n(a_1a_2\cdots a_{n-1})+(a_1a_2\cdots a_{n-2}).$$

421. $(C_n^k)^2$.

424. **提示**．证明：该置换的两行中的反序数等于$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k-2(1+2+\cdots+k)$.

425. 10. 426. 100. 427. 60. 428. 10. 429. $-4$. 430. $-2$. 431. 195. 432. 90. 433. 8. 434. 4. 435. 1000. 436. 12.

437. $(x_2-x_1)\sin(\gamma-\beta)+(y_2-y_1)\sin(\alpha-\gamma)+(z_2-z_1)\sin(\beta-\alpha)$.

438. $A^2x_1+B^2x_2+C^2x_3+2BCy_1+2CAy_2+2ABy_3$．其中$A=bc'-b'c$, $B=ca'-c'a$, $C=ab'-a'b$.

439. $-(ayz+bxz+cxy)$. 440. $-(aa'+bb'+cc')$.

441. $abc-x(bc+ca+ab)$.

442. $(x_4-x_3)[(x_3-x_2)(x_4-x_2)-2(x_3-x_1)(x_4-x_1)]$.

443. $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_{kk}a_{2n-k+1,2n-k+1}-a_{k,2n-k+1}a_{2n-k+1,k})$.

444. $(-1)^n\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$.

445. $-84$．**提示**．从第二行减去二倍的第一行，将二倍的第四行加于第三行．

446. $-84$. 447. 98. 448. 43. 449. 81.

450. 14. 451. $(-1)^n(nx+1)x^n$.

452. $b_{1n}b_{2,n-1}\cdots b_{n1}(a_{1n}-c_{1n})(a_{2n-1}-c_{2n-1})\cdots(a_{n1}-c_{n1})$.

453. $x^{2n}-x^{2n-2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$.

454. (a) $D=M_1M_4$; (b) $D=(-1)^kM_2M_3$.

455. $D=(-1)^{k+\frac{k(k+1)l}{2}}M_1M_2\cdots M_l$．符号规则可另外陈述如下：对于偶数的$l$取符号$(-1)^k$，而对于奇数的$l$取$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

459. $(2^{k+1}-1)(3^{l+1}-2^{l+1})-4(2^k-1)(3^l-2^l)$．**提示**．按前$k$行展开并使用递推关系式法．

460. $$(a_1a_2\cdots a_n)=(a_1a_2\cdots a_k)(a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_n)+(a_1a_2\cdots a_{k-1})(a_{k+2}a_{k+3}\cdots a_n).$$

这里置 $n=2k$, $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 并用 $u_n$ 表示 Fibonacci 级数的第 $n$ 个数，得到$u_{2k}=u_k^2+u_{k-1}^2$，即Fibonacci级数两相邻数的平方之和也是该级数的数.

462. **提示.** 在同一次序下将该 $n$ 行添加于给定矩阵之下，考察所得矩阵的 $2n$ 阶行列式.

463. **提示.** 按第 1, 3, 5 行展开行列式，证明：$D=A\Delta^2$, 其中 $A$ 与 $\Delta$ 的元素无关. 为了确定 $A$, 置 $\Delta$ 主对角线元素等于 1, 而 $\Delta$ 主对角线之外的元素等于零.

464. **提示.** 将等式左端的行列式关于每一行分解成行列式之和并表为形式

$$\sum_{i,j,k=0}^{4} a_i b_j c_k D_{ijk},$$

其中

$$D_{ijk}=\begin{vmatrix} \alpha^i & \beta^i & \gamma^i \\ \alpha^j & \beta^j & \gamma^j \\ \alpha^k & \beta^k & \gamma^k \end{vmatrix}.$$

证明这一和式只对不包含相等数的所有三数组 $ijk$ 而取. 对等式右端，按前三行展开 5 阶的行列式，并把右端表为形式 $\sum a_i b_j c_k C_{ijk}$, 其中和式取遍互异的由 0 变到 4 的数组成的所有三数组 $ijk$. 最后，证明：$D_{ijk}=C_{ijk}$; 为此，将任一个三数组 $ijk$ 用行列式的行和列的交换归于情形 $i<j<k$, 并考察所有十种可能的情形.

例如,

$$D_{0,1,3}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}=(\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta).$$

但也有

$$C_{0,1,3}=-\begin{vmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)\times(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta),$$

因为 $p=-(\alpha+\beta+\gamma)$.

466. **解.** 证明与拉普拉斯定理同样地进行. 要证明：乘积 $\varepsilon M_1 M_2\cdots M_p$

的任一项是行列式$D$的项．先令$M_1$位于前$k$行和前$k$列，$M_2$在相继的$l$行和相继的$l$列，等等，$M_p$在最后的$s$行和最后的$s$列，在这种情形置换(1)是恒等置换且$\varepsilon=+1$.

在元素的第一个下标增加的次序下取子式$M_1$、$M_2$、…、$M_p$的任一项的一个乘积．它包含每行和每列中的各一个元素，这意味着，按元素的组成来说它是$D$的项．如果在子式$M_i$的项的元素的第二个下标中有$\sigma_i$个反序，则这个乘积的符号是$(-1)^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_p}$．但两个不同的子式$M_i$和$M_j$的元素的下标不构成反序．这意味着，$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_p$是所取乘积的元素的第二个下标中反序的总数，于是，按符号来说它也是$D$的项．现在令各子式$M_i$的分布是任意的．用行列式$D$的行和列的下列一些变换把各子式移到主对角线上上面已考察过了的位置上去．首先，将子式$M_1$的号码为$\alpha_1$的第一行与$D$中其上的各行交换位置而移到第一行．这时我们完成了$\alpha_1-1$个行的对换，即在置换(1)的上行中数$\alpha_1$与它后面的各数所组成的反序数那么多个对换．然后，将号码为$\alpha_2$的行用同样的方法移到第二行，这时要完成在置换(1)上行中数$\alpha_2$与其后面各数所组成的反序数那么多个行的交换．等等．对$D$的各列进行同样的移动，如果在置换(1)第一行中有$\sigma$个反序，在第二行中有$\tau$个反序，则$\varepsilon=(-1)^{\sigma+\tau}$且总共完成$\sigma+\tau$个$D$的行和列的对换．所以对于化到的新行列式$D'$，有：

$$D=\varepsilon D'. \tag{2}$$

按着先前所证明的，乘积$M_1M_2\cdots M_p$的任何项是行列式$D'$的一项，而由于(2)，乘积$\varepsilon M_1M_2\cdots M_p$的任一项是行列式$D$的项．

同一或者两个不同的乘积$\varepsilon M_1M_2\cdots M_p$的一切项按元素的组成彼此互异，因此是行列式$D$的不同的项．余下来证明：所有这些乘积的项的总数等于$n!$．子式$M_1$的个数等于$C_n^k$．如果$M_1$已经选定，则子式$M_2$只能位于其余的$n-k$行中且它们的个数(对$M_1$的每一个选取)等于$C_{n-k}^l$．对选定的$M_1$和$M_2$，子式$M_3$的个数等于$C_{n-k-l}^m$，等等．最后，对选定的$M_1$、…、$M_{p-1}$，子式$M_p$的个数等于$C_s^s=1$．因此，所有形如$\varepsilon M_1M_2\cdots M_p$的乘积的数是

$$\begin{aligned}&C_n^k\cdot C_{n-k}^l\cdot C_{n-k-l}^m\cdots C_s^s\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!}\cdot\frac{(n-k-l)!}{m!(n-k-l-m)!}\cdots\frac{s!}{s!}\\&=\frac{n!}{k!l!m!\cdots s!}.\end{aligned}$$

但是行列式$D$在每一个乘积$\varepsilon M_1M_2\cdots M_p$中的项数等于$k!l!m!\cdots s!$，这意味着，在所有乘积$\varepsilon M_1M_2\cdots M_p$中的项数等于

$$\frac{n!}{k!l!m!\cdots s!}k!l!m!\cdots s!=n!.$$

467. 在相应的乘法之下得到下面的行列式.

行乘以行时：$\begin{vmatrix}-1 & 2 & -3\\ -4 & -7 & 13\\ -3 & -4 & -13\end{vmatrix}$,

行乘以列时：$\begin{vmatrix}7 & -26 & 13\\ 12 & -35 & 19\\ 17 & -52 & 27\end{vmatrix}$,

列乘以行时：$\begin{vmatrix}-3 & 1 & 6\\ -3 & 1 & -8\\ 4 & 7 & 1\end{vmatrix}$,

列乘以列时：$\begin{vmatrix}9 & -35 & 18\\ 13 & -47 & 24\\ 12 & -37 & 17\end{vmatrix}$.

给定的两行列式的值是$-5$和10，而所得到的上述行列式的值都等于$-50$.

468. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

469. $(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)^4$.

470. 0，当$n>2$；$(x_2-x_1)(y_2-y_1)$当$n=2$. **提示.** 表为行列式

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix} \text{ 和 } \begin{vmatrix}1 & y_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & y_2 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & y_n & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

的乘积的形式.

471. 0，如果$n>2$；$\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2)$，如果$n=2$.

472. 0，如果$n>2$；$\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$，如果$n=2$.

473. 0，如果$n>2$；$-\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$，如果$n=2$.

474. $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$.

475. $C_n^1C_n^2\cdots C_n^n\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$.

476. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$. **提示**. 将第 $i$ 行和第 $k$ 列的各元素写成形式$[i+(k-1)]^{n-1}$并按二项式幂的公式展开或者直接利用前题结果.

477. $\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$.

478. $\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$. **提示**. 表为行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$$

和

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

的乘积的形式,并且乘积按行组成.

479. **提示**. 将该行列式用 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

乘之.

481. $(1-a^n)^{n-1}$. **提示**. 利用习题 479 的结果和等式$(1-a\varepsilon_1)(1-a\varepsilon_2)\cdots(1-a\varepsilon_n)=1-a^n$,其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $n$ 次单位根. 但更简单的是把这个行列式作为习题 325 的行列式的特殊情形来计算.

483. $(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+bi-c-di)(a-bi-c+di)$

$=a^4-b^4+c^4-d^4-2a^2c^2+2b^2d^2-4a^2bd+4b^2ac-4c^2bd-4d^2ac.$

484. $[1+(-1)^n]^n=\begin{cases}0 & \text{当 } n \text{ 是奇数,}\\ 2^n & \text{当 } n \text{ 是偶数.}\end{cases}$

485. $(-1)^n\dfrac{[(n+1)a^n-1]^n-n^na^{n(n+1)}}{(1-a^n)^2}.$

486. **提示.** 利用习题 479 的结果,计算第一个行列式.

487. $(-2)^{n-1}(n-2p)$,如果 $n$ 和 $p$ 互素; 0,如果 $n$ 和 $p$ 不互素. **提示.** 利用习题 479 的结果和 $n$ 次单位根的性质. 特别是下列性质: 对于与 $n$ 互素的 $p$,数 $\varepsilon_1^p,\varepsilon_2^p,\cdots,\varepsilon_n^p$ 也是 $\sqrt[n]{1}$ 的全部值, 而对于不与 $n$ 互素的 $p$ 可找到 $\varepsilon_k\neq 1$,对于它有 $\varepsilon_k^p=1$.

488. $[3+(n-p)b](a-b)^{n-1}$, 如果 $n$ 和 $p$ 互素; 0, 如果 $n$ 和 $p$ 不互素. **提示.** 利用前题的提示.

489. $2^{n-2}\left(\cos^n\dfrac{\pi}{n}-1\right)$. **提示.** 置 $\cos\dfrac{j\pi}{n}=\dfrac{\varepsilon_1^j-\varepsilon_1^{-j}}{2}$, 其中

$$\varepsilon_1=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n},$$

利用习题 479 的结果和下列事实: 对任何 $a$ 有 $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a-\varepsilon_1^{2k})=a^n-1$, 以及 $\varepsilon_1^n=-1$.

490. $$\frac{[\cos\theta-\cos(n+1)\theta]^n-(1-\cos n\theta)^n}{2(1-\cos\theta)}$$
$$=2^{n-2}\sin^{n-2}\frac{n\theta}{2}\left[\sin^n\frac{(n-2)\theta}{2}-\sin^n\frac{n\theta}{2}\right].$$

**提示** 置 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $\eta=\cos\theta+i\sin\theta$ 并利用习题 479 的结果.

491. $(-1)^n2^{n-2}\sin^{n-2}\dfrac{nh}{2}\left[\cos^n\left(a+\dfrac{nh}{2}\right)-\cos^n\left(a+\dfrac{(n-2)h}{2}\right)\right].$

492. $(-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)(2n+1)n^{n-2}}{12}[(n+2)^n-n^n]$. **提示.** 利用习题 479 的结果以及关系式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 和 $1+4\varepsilon+9\varepsilon^2+\cdots+n^2\varepsilon^{n-1}=-\dfrac{n^2(1-\varepsilon)-2n}{(1-\varepsilon)^2}$, 其中 $\varepsilon$ 是 $n$ 次单位根之异于 1 的一个根.

为了得到最后一等式，用 $1-\varepsilon$ 乘并除左端.

493. $f(\eta_1)f(\eta_2)\cdots f(\eta_n)$，其中 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$ 且 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是根 $\sqrt[n]{-1}$ 的全部值，例如，

$$\eta_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}.$$

**提示**. 将给定的行列式用由数 $\eta_1$、$\eta_2$、$\cdots$、$\eta_n$ 组成的 Vandermonde 行列式乘之.

494. $f(\alpha_1)f(\alpha_2)\cdots f(\alpha_n)$，其中 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$ 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $z$ 的 $n$ 次根的全部值.

495. **提示**. 用 $\varepsilon_k=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}$, $k=0,1,2,\cdots,2n-1$，表示 1 的 $2n$ 次根，证明：具有偶下标 $k$ 的数 $\varepsilon_k$ 给出 $n$ 次单位根的全部值，并且 $a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\cdots+a_{2n}\varepsilon_k^{2n-1}=(a_1+a_{n+1})+(a_2+a_{n+2})\varepsilon_k+(a_3+a_{n+3})\varepsilon_k^2+\cdots+(a_n+a_{2n})\varepsilon_k^{n-1}$，而具有奇下标 $k$ 的数 $\varepsilon_k$ 给出 $-1$ 的 $n$ 次根的全部值，并且 $a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\cdots+a_{2n}\varepsilon_k^{2n-1}=(a_1-a_{n+1})+(a_2-a_{n+2})\varepsilon_k+(a_3-a_{n+3})\varepsilon_k^2+\cdots+(a_n-a_{2n})\varepsilon_k^{n-1}$.

496. 两个数——其中每一个是四个整数的平方之和——的乘积也是四个整数的平方之和. **提示**. 将行列式中的每一个自乘.

497. 两个数——其中每一个数是形式为 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的数，其中 $x,y,z$ 是整数——的积也是这种形式的数. **提示**. 计算行列式的乘积

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{vmatrix}.$$

(用第二个的列乘第一个的行).

498. **提示** 在用列乘以列的方法所组成的行列式的乘积中：

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & a \\ c & 1 & b \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a' & b' & 1 \\ c' & a' & 1 \\ b' & c' & 1 \end{vmatrix},$$

用 $s'=a'+b'+c'$ 乘第三列并将因子 $s'$ 从第二行中提出到行列式之外. 然后从第三列中减去第一列和第二列.

499. **提示**. 将行列式 $D$ 写成形式

$$D=\begin{vmatrix}\Sigma a_{1,k_1}b_{1,k_1} & \Sigma a_{1,k_2}b_{2,k_2} & \cdots & \Sigma a_{1,k_m}b_{m,k_m}\\ \Sigma a_{2,k_1}b_{1,k_1} & \Sigma a_{2,k_2}b_{2,k_2} & \cdots & \Sigma a_{2,k_m}b_{m,k_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Sigma a_{m,k_1}b_{1,k_1} & \Sigma a_{m,k_2}b_{2,k_2} & \cdots & \Sigma a_{m,k_m}b_{m,k_m}\end{vmatrix},$$

其中第 $j$ 列的所有的和对同一个下标 $k_j=1,2,\cdots,n$ 而取. 将 $D$ 关于列分解成 $n^m$ 个行列式之和,在每一个加项中从第 $j$ 列中将 $b_{j,k_j}$ 提到行列式符号之外并证明:

$$D=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_m=1}^{n} b_{1,k_1}b_{2,k_2}\cdots b_{m,k_m}A_{k_1,k_2,\cdots,k_m}, \tag{3}$$

其中求和各指标由 1 到 $n$ 彼此独立地变化. 注意: 如果在指标 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 中有相等的,则 $A_{k_1,k_2,\cdots k_m}=0$. 由此推出断言 (2), 而当 $m\leqslant n$ 时证明: 对任何指标 $i_1,i_2,\cdots,i_m$, 其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n$, 和式(3)中指标 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 组成数 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 的任何排列的所有加项的和等于

$$A_{i_1,i_2,\cdots,i_m}\cdot B_{i_1,i_2,\cdots,i_m},$$

由此就得到断言(1).

500. **提示.** 借助于由一些零组成的 $m-n$ 列将矩阵 $A$ 和 $B$ 补充成为方阵.

501. **提示.** 应用习题 499 的定理于矩阵

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n\end{pmatrix}.$$

503. **提示.** 利用前题的恒等式.

504. **提示.** 应用习题 499 的定理于矩阵

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}\bar a_1 & \bar a_2 & \cdots & \bar a_n\\ \bar b_1 & \bar b_2 & \cdots & \bar b_n\end{pmatrix}.$$

505. **提示.** 利用前题的恒等式.

506. **提示.** 按行将 $D$ 和 $D'$ 相乘,证明: $DD'=D^n$, 由此当 $D\neq0$ 就推出(1). 当 $D=0$ 时考察 $D$ 的所有元素等于零的情形. 如果 $D=0$, 但至少一个元素 $a_{ij}\neq0$, 则将 $D'$ 的乘以 $a_{1j}$ 的第一行、乘以 $a_{2j}$ 的第二行、…、乘以 $a_{nj}$ 的第 $n$ 行加到乘以 $a_{ij}$ 的第 $i$ 行上去并证明: $a_{ij}D'=0$.

如果认为 $D$ 的元素不是数而是独立变量, 情形 $D=0$ 可以略去. 此时行列式将是异于零的多项式且证明: (1)是恒等式,这意味着,它对变量 $a_{ij}$ 而言在任何数值下是正确的,与 $D$ 是否变为零无关.

507. **提示.** 首先考察当 $M$ 位于左上角的情形. 用写为以下形式的子式 $M'$:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} & A_{1,m+1} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & & A_{mm} & A_{m,m+1} & \cdots & A_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

按行乘 $D$, 证明: $DM'=D^mA$ 和 $M'=D^{m-1}A$ ($D=0$ 的情形可以象前题那样地略去, 即认为 $D$ 是 $n^2$ 个未知量 $a_{ij}$ 的多项式). 然后用行和列的移动把一般位置的 $M$ 归结到已考察过的情形, 为此证明: 如果在 $D$ 中将相邻两行(或两列)交换, 则转置伴随行列式 $D'$ 中发生行(或列)的同样交换, 此外, $D'$ 的所有元素变号.

508. **提示.** 利用前题.

509. **提示.** 利用 507 题.

510. **提示.** 应用当 $m=n-1$ 时习题 507 的等式.

511. **提示.** 应用用 $n-m$ 替换 $m$ 的习题 507 的等式.

512. **提示.** 按转置伴随行列式 $D'$ 的值求行列式 $D$ 的值, 并应用习题 510 的等式. 证明: 习题有 $n-1$ 个解.

513. **提示.** 将第一个行列式表为由数 $0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的 Vandermonde 行列式的平方.

514. $A_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$.

515. **提示.** 考察乘积 $D\Delta$ 和 $\Delta D$. 其中 $D$ 是给定的行列式, $\Delta$ 是与 $D$ 同阶的行列式, 它是从主对角线上为 1 其余元素为零的行列式交换了第 $i$ 和第 $j$ 行而得到的.

516. **提示.** 考察乘积 $D\Delta$ 和 $\Delta D$, 其中 $D$ 是给定的行列式, 而在 $\Delta$ 内主对角线的元素等于 1, 在第 $i$ 行和第 $j$ 列交叉处的元素等于 $c$, 其余的元素等于零.

517. **提示.** 置 $\varphi_1=\alpha_2-\alpha_3$; $\varphi_2=\alpha_3-\alpha_1$; $\varphi_3=\alpha_1-\alpha_2$.

518. **提示.** 应用习题 502 的恒等式.

520. 如果射线 $M_3M_1$ 到与 $M_3M_2$ 重合的最小旋转方向, 和从 $Ox$ 的正

向到$Oy$的正向的最小旋转方向一致的话，行列式等于三角形$M_1M_2M_3$面积的两倍．在相反的情形，它等于三角形$M_1M_2M_3$面积的两倍带有负号．

**解．** 所指坐标变换用以下公式表达：

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0.$$

由此，按行相乘，得：

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

但是等式左端的第二个行列式等于1．这证明习题中给定的行列式在所指的变换下是不变的．把坐标原点移到点$M_3$并转动轴使新的横轴沿着$M_3M_1$．点$M_1$，$M_2$，$M_3$的新坐标是$x_1' = M_3M_1$、$y_2' = \pm h$，其中$h$是从顶点$M_2$所引三角形$M_1M_2M_3$的高，并且正负号的选择按上述规则与三角形的定向相符，$y_1' = x_3' = y_3' = 0$．因此行列式取形式

$$\begin{vmatrix} x_1' & 0 & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm M_3M_1 \cdot h = \pm 2S,$$

其中$S$是三角形$M_1M_2M_3$的面积．

521．行列式等于在连接坐标原点与点$M_1$和$M_2$的线段上所构造的平行四边形的面积．如果从$OM_1$到$OM_2$与从$Ox$到$Oy$的最小旋转方向一致，则取正号；如果这两个方向相反，则取负号．当轴旋转时行列式不变，但当移动原点时它可能改变．**提示．** 以坐标原点为第三点，应用前题结果．

522．$R = \frac{abc}{4S}$．**提示．** 取外接圆圆心作坐标原点，利用关系式

$$R^2 - x_ix_j - y_iy_j = \frac{1}{2}[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

以及习题520的结果．

523．**提示．** 证明：行列式的平方等于1．为了确定符号，利用行列式关于所有变量$\alpha_i$，$\beta_i$，$\gamma_i$（$i = 1, 2, 3$）的总体的连续性，证明：当旋转图形$OABC$时，符号不变．

524．行列式等于由连接坐标原点$O$和点$M_1$、$M_2$、$M_3$的线段所构成的平行六面体的体积，或者等于四面形$OM_1M_2M_3$的六个体积．如果三面形$OM_1M_2M_3$和$Oxyz$的定向相同，体积取正号，如果定向相反，则取负号（定向

被认为是相同的，如果：用旋转三面形 $Oxyz$ 的方法，在使轴 $Ox$ 与 $OM_1$ 相合、平面 $xOy$ 与 $OM_1M_2$ 相合时，使得 $Oy$ 和 $OM_2$ 位于 $Ox$ 的同一侧后，射线 $Oz$ 和 $OM_3$ 在平面 $xOy$ 的同一侧；而被认为是相反的，如果射线 $Oz$ 和 $OM_3$ 在不同侧）. **提示.** 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 分别是新轴 $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ 与旧轴间的余弦，则旧坐标和新坐标之间以下列关系式联系着：

$$x=\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1z',\ y=\alpha_2x'+\beta_2y'+\gamma_2z',\ z=\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3z'.$$

利用这点以及前题的结果，证明本题行列式的不变性．为了阐明行列式的几何意义，象上面确定三面形定向相同和相反时所指出地那样转动坐标系 $Oxyz$.

525. $V=abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$. **提示.** 利用前题结果，计算 $V^2$.

526. **提示.** 在射线 $OA, OB, OC$ 上取点 $M_1, M_2, M_3$ 距离坐标原点为 1 并应用习题 524 的结果.

527. 行列式等于顶点为 $M_1, M_2, M_3, M_4$ 的四面形的六个体积，且如果从 $M_4$ 到点 $M_1, M_2, M_3$ 的射线的三面形与三面形 $Oxyz$ 有相同的定向，体积取正号，在相反的情形取负号. **提示.** 移动坐标原点到点 $M_4$ 并应用习题 524 的结果．利用习题 523，可以类似于解习题 520 那样进行．这时习题524 作为本题的特殊情形而得到(类似于习题 521 中在平面上的情形).

528. $R=\dfrac{1}{24V}$

$$\times\sqrt{2l_{13}^2l_{14}^2l_{23}^2l_{24}^2+2l_{12}^2l_{14}^2l_{32}^2l_{34}^2+2l_{12}^2l_{13}^2l_{42}^2l_{43}^2-l_{12}^4l_{34}^4-l_{13}^4l_{24}^4-l_{14}^4l_{23}^4},$$

其中 $V$ 是四面形的体积且 $l_{ij}=l_{ji}$ $(i, j=1, 2, 3, 4, i\neq j)$ 是连接顶点 $(x_i, y_i, z_i)$ 和 $(x_j, y_j, z_j)$ 的棱的长．在棱长为 $a$ 的正四面形的情形下得到 $R=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

**提示.** 应用前题的结果以及关系式

$$R^2-x_ix_j-y_iy_j-z_iz_j=\frac{1}{2}[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2],$$

后者在坐标原点移至外接球的中心的假定下是正确的.

529. **提示.** 当证明断言(2)时证明：向量 $a_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 可以表为 $a_i=a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+\cdots+a_{in}e_n$. 其次证明：当交换两个向量时函数 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 变号．在证明这点时，例如对向量 $a_1$, $a_2$, 考察 $f(a_1+a_2, a_1+a_2, a_3, \cdots, a_n)$.

530. **提示.** 证明：矩阵 $A$ 的行的函数 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)=|AB|$ 具有性

质($\alpha$)和($\beta$)并证明 $f(e_1, e_2, \cdots, e_n) = |B|$.

531. 置 $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_n}) = 1$, 对任何(相同的或不同的) $i_1, i_2, \cdots, i_n = 1, 2, \cdots, n$. 令 $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$. 由于($\alpha$)得到

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n = 1}^{n} a_{1, i_1} a_{2, i_2} \cdots a_{n, i_n}.$$

由此, 函数 $f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 被定义. 当交换向量时它显然不变, 即在示性数为 2 的域的情形变号. 所以($\beta'$)成立, 而($\beta$)显然不成立.

532. $(-1)^{C_n^2} i^{C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}} = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}} n^{\frac{n}{2}}$.

**解.** 将给定的行列式自乘并注意: $\varepsilon^k = 1$ 当且仅当 $k$ 被 $n$ 除尽, 得到:

$$D^2 = \begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{C_{n-1}^2} n^n,$$

由此 $D = \pm i^{C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}}$, 且对 $D$ 的模求得: $|D| = n^{\frac{n}{2}}$. 余下来确定辐角. 作为数1, $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}$的 Vandermonde 行列式计算 $D$ 并置 $\varepsilon = \alpha^2$, 其中 $\alpha = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, 便得到:

$$\begin{aligned} D &= \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\varepsilon^k - \varepsilon^j) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\alpha^{2k} - \alpha^{2j}) \\ &= \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{k+j} (\alpha^{k-j} - \alpha^{-(k-j)}) \\ &= \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{j+k} \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} 2i \sin\frac{(k-j)\pi}{n}. \end{aligned}$$

对于上面所考察的值 $j$ 和 $k$ 总有 $0 \leqslant k-j < n$, 这意味着 $\sin\frac{(k-j)\pi}{n} > 0$.

所以 $|D| = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} 2\sin\frac{(k-j)\pi}{n} = n^{\frac{n}{2}}$. $D = |D| \beta$, 其中

$$\beta = i^{C_n^2} \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{j+k}.$$

$\alpha$ 的幂指数中每一个整数 $p(0\le p\le n-1)$ 恰好出现 $n-1$ 次：或者对 $k=p+1, p+2, \cdots, n-1$ 以 $j$ 的形式，或者对 $j=0, 1, 2, \cdots, p-1$ 以 $k$ 的形式.

注意 $\alpha^{\frac{n}{2}}=i$（对奇数 $n$ 将有 $\alpha^{\frac{n}{2}}=\pm i$. 然而由于数 $n-1$ 的偶性，符号的选取不起作用. 这由下面所进行的计算很容易得到）. 求得：

$$\beta=i^{\frac{n(n-1)}{2}}\alpha^{\frac{n(n-1)^2}{2}}=i^{\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)^2}=i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}.$$

置 $3n=2n+n$ 并利用上面已知的 $D$ 的表达式，就得到所要求的 $D$ 的表达式.

533. 行列式将乘以 $(2-k)2^{k-1}$. **提示**. 把任意行的情形归结为前面若干行的情形. 如果选定前 $k$ 行，则所述变换可用下法得到：将所给定的行列式左乘以一个同阶的行列式，后者的所有主对角线元素等于 1，主对角线之外位于前 $k$ 行和前 $k$ 列的各元素等于 $-1$，而所有其余的元素等于零.

534. $D=D_0+Sx$，其中 $D_0$ 是行列式 $D$ 当 $x=0$ 时的值，$S$ 是 $D_0$ 所有元素的代数余子式之和.

535. **提示**. 利用前题结果.

536. **提示**. 利用前题.

537. **提示**. 在习题 534 的行列式中置 $x=-1$.

539. **提示**. 应用数学归纳法.

540. **提示**. 将行列式 $D$ 的所有 $np$ 行分成 $n$ 组，每组中 $p$ 行，将号码为 $1, n+1, 2n+1, \cdots, (p-1)n+1$ 的各行归于第一组，将号码为 $2, n+2, 2n+2, \cdots, (p-1)n+2$ 的各行归于第二组，…，将第 $n, 2n, 3n, \cdots, pn$ 行归于第 $n$ 组. 对这些组应用习题 466 的广义 Laplace 定理，证明：上述各组中任何一组的 $p$ 阶子式，如果至少有两个 $b_{ij}$ 它们的第二个下标是相同的，则等于零，并证明：$D=f(a_{11}, \cdots, a_{nn})B^p$，其中 $f(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ 与元素 $b_{ij}$ 无关. 为了确定 $f(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ 置 $b_{ii}=1, i=1, 2, \cdots, n$，与 $b_{ij}=0, i, j=1, 2, 3, \cdots, n, i\neq j$.

542. **解**. 如果所有的 $A_{ij}=0$，则可以置

$$A_i=B_i=0\quad(i=1, 2, \cdots, n).$$

例如，令最后一列元素的代数余子式不全等于零（在其他列的情形讨论是类似的）. 因为 $D=0$，所以两列元素的代数余子式成比例（参看习题 509）：

$$\frac{A_{1j}}{A_{1n}}=\frac{A_{2j}}{A_{2n}}=\cdots=\frac{A_{nj}}{A_{nn}}=\frac{B'_j}{C_j}(j=1, 2, \cdots, n-1),$$

其中认为分式 $\frac{B'_j}{C_j}$ 是不可约的. 由此

$$A_{ij}=\frac{A_{in}B'_j}{C_j}\qquad(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n-1).\qquad(1)$$

但 $A_{ij}$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 的多项式且分式 $\frac{B'_j}{C_j}$ 是不可约的，所以 $A_{in}$ 可被 $C_j$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ 整除，而这意味着，可被所有 $C_j(j=1,2,\cdots,n-1)$ 的最小公倍式整除．用 $B_n$ 表示这最小公倍式，得到：

$$A_{in}=A_iB_n\ \ (i=1,2,\cdots,n),\qquad(2)$$

其中所有的 $A_i$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 的多项式．令 $B_j=\frac{B_n}{C_j}\cdot B'_j(j=1,2,\cdots,n-1)$，所有的 $B_j$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 的多项式，并且从(1)求得：

$$A_{ij}=A_iB_j\ \ (i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,n-1).\qquad(3)$$

等式(2)和(3)就证明了定理．特别地，对行列式 $\Delta$，可以置：

$$A_1=B_1=c,\qquad A_2=B_2=-b,\qquad A_3=B_3=a.$$

543．**解**．令 $D_{2n}$ 是 $2n$ 阶的斜对称行列式．对 $n$ 应用归纳法．对 $n=1$ 定理是正确的，因为 $D_2=a_{12}^2$．假定定理对数 $n$ 正确，来证明对数 $n+1$ 也正确．从给定的行列式 $D_{2n+2}$ 中划去最后一行和最后一列，得到等于零的斜对称行列式 $D_{2n+1}$．它的元素可以看作位于主对角线上方的元素的具有整系数的多项式．按前一习题的定理，$D_{2n+1}$ 的元素的代数余子式有形式 $A_{ij}=A_iB_j$ $(i,j=1,2,\cdots,2n+1)$，其中 $A_i$ 和 $B_j$ 是上述未知量的多项式．$D_{2n+1}$ 中的子式 $M_{ij}$ 和 $M_{ji}$，一个可以用转置及改变元素符号从另一个得到，而因为它们是偶数 $2n$ 阶的，所以 $A_{ij}=A_{ji}$，或者 $A_iB_j=A_jB_i$．

$$\frac{B_i}{A_i}=\frac{B_j}{A_j}=\lambda;\ \ B_i=\lambda A_i\ \ (i=1,2,\cdots,2n+1).$$

$\lambda$ 是上述未知量的有理函数．其次，$A_{ii}=A_iB_i=\lambda A_i^2$，且按假定 $A_{ii}$ 是完全平方．这意味着 $\lambda=\mu^2$，其中 $\mu$ 是有理函数．于是，$A_{ii}=(\mu A_i)^2$．这里左端是多项式．但不可约分式的平方不可能是多项式．所以 $\mu A_i=C_i$ 是多项式．应用习题 541 中的已知展开式，求得：

$$D_{2n+2}=-\sum_{i,j=1}^{2n+1}A_{ij}a_{i,2n+2}a_{2n+2,j}=\sum_{i,j=1}^{2n+1}A_iB_ja_{i,2n+2}a_{j,2n+2}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{2n+1}A_ia_{i,2n+2}\right)\left(\sum_{j=1}^{2n+1}B_ja_{j,2n+2}\right)=\lambda\left(\sum_{i=1}^{2n+1}A_ia_{i,2n+2}\right)^2$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{2n-1} C_i a_{i,2n+2}\right)^2.$$

这就证明了习题的断言．这个证明没有给出其平方等于给定的偶数阶斜对称行列式的那个多项式之详细的实际计算方法．此种规则在习题 545 和546 中给出．

544．**提示**．考察两项，其中之一的下标的置换有轮换$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_h)$（$h$ 是奇数且大于 1），另一项则有轮换$(\alpha_h\alpha_{h-1}\cdots\alpha_2\alpha_1)$．$h=1$ 的情形单独考察．

545．**提示**．当根据给定的归纳 Pfaffian 乘积对 $N_1$、$N_2$ 证明(1)时，还原成所求项的置换记法(1)，并注意：如果把这项写成

$$\pm a_{\alpha_1,\alpha_2}a_{\alpha_3,\alpha_4}\cdots a_{\alpha_h,\alpha_1}a_{\beta_1,\beta_2}\cdots a_{\mu_k,\mu_1},$$

则 $N_1'$ 由这乘积中奇数位置的元素组成，而 $N_2'$ 由偶数位置的组成．例如，在 $N_1$ 中取第一个下标 $\alpha_1=1$ 的元素．它的第二个下标 $\alpha_2$ 给出第一个轮换的第二个元素．在 $N_2$ 中取其下标之一是 $\alpha_2$ 的一个元素．如果其另一个下标是 $\alpha_1$，则轮换闭合，如果是 $\alpha_3$，则这是轮换的第三项．等等．证明：在所得到的置换中所有的轮换都是偶数长的．当证明(2)时，注意：$N_1=N_1'$ 和 $N_2=N_2'$．项的符号由$(-1)^s$ 决定，其中 $s$ 是对应的置换的轮换数．论断(3) 从(1)、(2)和前题定理导出．

546．**提示**．证明：组 $p_n$ 的每一个加项中含有 $D_n$ 的第 $n$ 列的一个且仅含有一个元素；在 $p_n$ 的每个加项中按第二个下标增加次序排列元素并证明：如果将元素 $a_{in}$ 从包含它的所有加项中提出到括号之外，则在括号中剩下 $p_{in}$ 带有符号$(-1)^{n-1-i}=(-1)^{i-1}$．

547．$p_2=a_{12}$；$p_4=a_{23}a_{14}-a_{13}a_{24}+a_{12}a_{34}$；$p_6=a_{34}a_{25}a_{16}-a_{24}a_{35}a_{16}+a_{23}a_{45}a_{16}-a_{34}a_{15}a_{26}+a_{14}a_{35}a_{26}-a_{13}a_{45}a_{26}+a_{24}a_{15}a_{36}-a_{14}a_{25}a_{36}+a_{12}a_{45}a_{36}-a_{23}a_{15}a_{46}+a_{13}a_{25}a_{46}-a_{12}a_{35}a_{46}+a_{23}a_{14}a_{56}-a_{13}a_{24}a_{56}+a_{12}a_{34}a_{56}$.

548．$1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)$．

549．**提示**．将 $D$ 的加边行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ -x_1 & \cdots & -x_n & 0 \end{vmatrix}$$

按习题 541的公式展开，并按习题 545(3) 令其等于 $D'$ 的 Pfaffain 的平方，再应用习题 546 中的公式．在所得等式中令 $x_i=x_j=1, x_k=0$，当 $i\neq k\neq j$．

550. **提示.** 利用两个非零多项式之积也非零这一事实证明：如果 $D=AB$ 是假定的分解式且多项式 $A$ 的某项包含 $a_{11}$，则 $B$ 的任何项都不包含第一行(或列)的元素. 由此推出：无论对怎样的 $i, j=1,2,\cdots,n$，在 $A$ 中有包含 $a_{ij}$ 的项，但 $B$ 的任何项都不包含 $a_{ij}$.

551. **提示.** 当证明(2)时确定 $\bar{\Delta}_{n-k}$. 从由 $n$ 个数 $1,2,\cdots,n$ 每次取 $n-k$ 个的组合的编号 $t_1, t_2, \cdots, t_{\binom{n}{n-k}}$ 出发，这个编号与决定 $\Delta_k$ 的编号 $s_1, s_2, \cdots, s_{\binom{n}{k}}$ 的联系是：$t_i$ 包含的 $n-k$ 个数是不包含在 $s_i$ 中的. 如果 $\sigma_i$ 是组合 $s_i$ 中的数的和，则从行列式 $\bar{\Delta}_{n-k}$ 的第 $i$ 行和第 $i$ 列$\left(i=1,2,\cdots,\binom{n}{n-k}\right)$中提出因子$(-1)^{\sigma_i}$. 当证明(4)时，利用(3)的等式和在前题中确定的$D$的不可约性，以及行列式$D$和$\Delta_k$关于元素$a_{ij}$的幂，证明：$\Delta_k=cD^{\binom{n-1}{k-1}}$，其中 $c$ 与元素 $a_{ij}$ 无关. 为确定 $c$ 证明：$\Delta_k$ 与 $D^{\binom{n-1}{k-1}}$ 都包含项 $(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn})^{\binom{n-1}{k-1}}$ 并且系数等于 1.

552. $P_n=Q_n=1$. **提示.** 证明：$Q_n=P_n^2$.

553. **提示.** 证明：

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj}\varphi(k),$$

其中 $p_{ij}$ 同前题.

## 第二章 线性方程组

554. $x_1=x_2=1,\ x_3=x_4=-1.$

555. $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=-1.$

556. $x_1=1,\ x_2=x_3=2,\ x_4=0.$

557. $x_1=2,\ x_2=-2,\ x_3=1,\ x_4=-1.$

558. $x_1=-0.4,\ x_2=-1.2,\ x_3=3.4,\ x_4=1.$

559. $x=\frac{2}{3},\ y=-1,\ z=\frac{3}{2},\ t=0.$

560. $x=-3,\ y=0,\ z=-\frac{1}{2},\ t=\frac{2}{3}.$

561. $x=2$, $y=-3$, $z=-\frac{3}{2}$, $t=\frac{1}{2}$.

562. 组没有解. 563. 组没有解.

564. 改变未知量的编号一般说来不把方程组变为等价组，但当解方程组时，这种改变在以下条件下是容许的：在解完方程组之后，回复到原来的编号. **提示**. 证明，在(a)，(b)，(c)型的变换之后，新组的任何方程可用旧组的方程线性表达(是旧组各方程的线性组合)，反之亦然.

567. $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=-2$, $x_4=2$.

568. $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-3$, $x_4=1$.

569. $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=4$, $x_4=3$.

570. $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_4=-\frac{3}{2}$.

571. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{2}{3}$, $x_3=2$, $x_4=-3$.

572. $x_1=104\frac{6}{7}$, $x_2=7\frac{4}{7}$, $x_3=-10$, $x_4=1$.

573. $x_1=5$, $x_2=4$, $x_3=3$, $x_4=2$, $x_5=1$.

574. $x_1=3$, $x_2=-5$, $x_3=4$, $x_4=-2$, $x_5=1$.

575. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-2$, $x_3=3$, $x_4=\frac{2}{3}$, $x_5=-\frac{1}{5}$.

**提示**. 取 $2x_1$, $3x_4$, $5x_5$ 为新未知量.

576. $x_1=5$, $x_2=4$, $x_3=-3$, $x_4=3$, $x_5=-2$.

577. $x_1=2$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x_3=4$, $x_4=3$, $x_5=\frac{5}{2}$.

578. 组是不定的，即它有无穷多个解；$x_1$ 和 $x_2$ 可以用 $x_3$ 和 $x_4$ 表达如下：$x_1=6-26x_3-17x_4$, $x_2=-1+7x_3-5x_4$，并且 $x_3$ 和 $x_4$ 可以取任何值.

579. 组是不定的，通解是：$x_1=\frac{1}{10}(6-15x_2-x_4)$，$x_3=\frac{1}{5}(1+4x_4)$，其中 $x_2$ 和 $x_4$ 取任何值.

580. 组是矛盾的，即没有解.

581. 组没有解.

584. 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是域的所有元素，则多项式 $f(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 作为函数等于零，但 $x^n$ 的系数为 1.

585. $f(x)=x^2-5x+3$. 586. $f(x)=2x^3-5x^2+7$.

587. 对于给定的渐近方向，通过平面上任何 $n+1$ 个不同的点，其中任何两点不位于渐近方向的直线上，可以引一条不高于 $n$ 次的抛物线并且只能引一条.

588. $y=3x^3-5x^2+1$. 589. $x=y^4-3y^3-5y+5$.

590. $x=\frac{1}{4}(-a+b+c+d)$, $y=\frac{1}{4}(a-b+c+d)$,

$$z=\frac{1}{4}(a+b-c+d),\quad t=\frac{1}{4}(a+b+c-d).$$

591. $x=\frac{1}{2}\left(-\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right)$,

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{c-ad}{b-a}-\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right),$$

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}-\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right),$$

$$t=d-\frac{1}{2}\left(\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right).$$

**提示**. 为了证明解的唯一性，要证明：组的行列式等于 $2(b-a)(b'-a')\cdot(b''-a'')\neq 0$. 为了求出解，从第一、第二、第三个方程中减去分别乘以 $a$、$a'$ 和 $a''$ 的第四个方程.

592. $x=\frac{1}{A}(ap-bq-cr-ds)$, $y=\frac{1}{A}(bp+aq-dr+cs)$,

$$z=\frac{1}{A}(cp+dq+ar-bs),\quad t=\frac{1}{A}(dp-cq+br+as).$$

其中 $A=a^2+b^2+c^2+d^2$. **提示**. 利用习题 468.

593. $x_k=(-1)^k P_k$，其中 $P_k$ 是数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 取 $k$ 个的所有可能的乘积之和. **提示**. 利用习题 346.

594.

$$x_k=\frac{\prod\limits_{i\neq k}(b-a_i)}{\prod\limits_{i\neq k}(a_k-a_i)}=\frac{f(b)}{(b-a_k)f'(a_k)},$$

其中 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$.

595.

$$x_k=(-1)^{n+k}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i f_{ik}}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)},$$

其中 $f_{ik}$ 是从 $n-1$ 个数 $a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$ 中取 $n-k$ 个的所有可能的乘积之和。

596.

$$x_k = \frac{1}{(a_k-a_1)\cdots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\cdots(a_k-a_n)}\sum_{i=1}^{n} b_i f_{ki},$$

其中 $f_{ki}$ 是从 $n-1$ 个数 $a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 中取 $n-i$ 个的所有可能的乘积之和.

597. $x_k = \frac{(-1)^k P_{n-k}}{n!}$, 其中 $P_i (i=1, 2, \cdots, n-1)$ 是从 $n$ 个数 $1, 2, \cdots, n$ 中取 $i$ 个的所有可能乘积之和且 $P_0=1$.

598.

$$x_k = \frac{c_k}{a-b} - \frac{b\sum_{i=1}^{n} c_i}{(a-b)[a+(n-1)b]}.$$

599. $x_k = \prod_{i \neq k} \frac{b-a_i}{a_k-a_i}$. **提示.** 把组的行列式表为两个行列式乘积的形式.

600. **解.** $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$.

所以 $1=(1+h_1x-h_2x^2+h_3x^3+\cdots)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)$. 由此 $h_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}h_1 - h_2 = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}h_1 - \frac{1}{2}h_2 + h_3 = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}h_1 - \frac{1}{3}h_2 + \frac{1}{2}h_3 - h_4 = \frac{1}{5}, \cdots$ 从前 $n$ 个方程按 Cramer 规则得到要求的 $h_n$ 的表达式.

602. **提示.** 从恒等式

$$1=(1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right)$$

出发，可得到确定 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 的方程组. 为了证明：当 $n>1$ 时 $b_{2n-1}=0$, 注意：$b_1 = -\frac{1}{2}$ 且函数

$$\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{1}{2}x = \frac{\frac{1}{2}x(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})-(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}$$

是偶函数.

603. **提示.** 利用在前题中得到的等式

$$b_1=-\frac{1}{2},\quad 当\ n>1\ 时\ b_{2n-1}=0.$$

置 $b_{2n}=c_n$ 并在恒等式

$$1=\left(1-\frac{1}{2}x+c_1x^2+c_2x^4+c_3x^6+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right)$$

中分别令 $x$ 的偶次幂和奇次幂的系数相等.

604. **提示.** 为了建立所要求的等式, 在恒等式

$$(x+1)^n=x^n+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^{n-2}x^{n-2}+\cdots+C_n^1x+x^0$$

中置 $x=1,2,3,\cdots,k-1$ 并将所得各等式相加. 在所建立的等式中用 $n-1$, $n-2,\cdots,2,1$ 代替 $n$ 并从所得的关于 $s_0(k),s_1(k),\cdots,s_{n-1}(k)$ 的 $n$ 个线性方程的组求 $s_{n-1}(k)$.

605.

$$l_n=\begin{vmatrix}\frac{2}{3!} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{4}{5!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0\\ \frac{6}{7!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{2n}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \cdots & \frac{1}{2!}\end{vmatrix}.$$

**提示.** 得出恒等式

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$
$$=x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)(1+l_1x^2+l_2x^4+\cdots).$$

606.

$$f_n=\begin{vmatrix}\frac{2}{3!} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{4}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \cdots & 0\\ \frac{6}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{2n}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \cdots & \frac{1}{3!}\end{vmatrix}.$$

607.

$$a_n = \frac{1}{n!}\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}.$$

**提示.** 利用恒等式

$$1=(1-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

得出确定 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的方程组.

608. 2. 609. 3. 610. 3. 611. 2. 612. 当 $\lambda=0$ 时矩阵的秩等于 2, 当$\lambda\neq0$ 时等于3. 613. 当 $\lambda=3$ 时 秩等于 2, 当 $\lambda\neq3$ 时秩等于 3. 619. 3. 620. 2. 621. 3. 622. 2.

629. **提示.** 用穿过子式 $d$ 的列线性表示 $A$ 的所有列, 证明: 如果 $d=0$, 则 $A$ 的穿过 $d$ 的诸行是线性相关的.

630. 如果 $0\leqslant r\leqslant n-2$, 则 $\hat{r}=0$. 如果 $r=n-1$, 则$\hat{r}=1$. 如果 $r=n$, 则 $\hat{r}=n$. **提示.** 利用习题 509 或者习题 747.

631. **解.** 证明(1). 当 $r=0$ 时所有一阶和二阶主子式等于零. 如果 $A=(a_{ij})_n$, 则 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0$ 且

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}=a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^2=-a_{ij}^2=0$$

对任何 $i, j=1, 2, \cdots, n; i<j$. 由此

$$a_{ij}=0,\quad i, j=1, 2, \cdots, n;\ A=0;$$

$A$ 的秩等于零, 这正是需要证明的. 当 $r=n-1$ 时有 $M_{n-1}\neq0$, $M_n=|A|=0$, $A$ 的秩等于 $n-1$.

令 $0<r\leqslant n-2$. 主子式 $M_r\neq0$. 适当地交换矩阵 $A$ 的行和列(不破坏矩阵 $A$ 的对称性且不改变它的秩), 可以把子式 $M_r$ 移到矩阵 $A$ 的左上角. 为了证明(1)只要阐明下列事实就够了: $M_r$ 的所有加边的 $r+1$ 阶子式都等于零.

令 $M_{ij}$ 是由 $M_r$ 加边第 $i$ 行和第 $j$ 列$(i, j>r)$所得到的子式. 按条件当 $i=j$ 时 $M_{ij}=0$. 令 $i\neq j$ 且 $D$ 是由 $M_r$ 用加边第 $i$ 和第 $j$ 行以及第 $i$ 和第 $j$ 列所得到的行列式. 按条件 $D=0$. 令 $C$ 是行列式 $D$ 的矩阵. 假定 $M_{ij}\neq 0$, 则 $C$ 的秩等于 $r+1$ 且 $C$ 的号码为 $1, 2, \cdots, r, i$ 的行是线性无关的. 由 $C$ 的对称性, 有上述号码的列也线性无关. 由习题629, 处在这些行和列交叉处的子式 $M_{ii}$ 非零, 但这与假设矛盾. 论断(2) 可从(1)推出或直接从习题 629 推出.

632. **提示**. 利用前题. 633. **提示**. 利用习题 631 的解. 634. **提示**. 利用前题. 636. $(1, 4, -7, 7)$. 637. $\boldsymbol{x}=(0, 1, 2, -2)$. 638. $\boldsymbol{x}=(1, 2, 3, 4)$. 639. 线性无关. 640. 线性相关. 641. 线性无关. 642. 线性相关. 643. 线性相关. 644. 线性无关.

651. **提示**. 假定: $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\boldsymbol{a}_i=0$, 其中 $\lambda_i$ 不全等于零. 并在诸 $\lambda_i$ 中选出模最大的系数 $\lambda_j$, 证明: 所取线性组合的第 $j$ 个坐标异于零.

656. **提示**. 假定: 两个向量 $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j (i>j)$ 用其前面的向量线性表达之, 从 $\boldsymbol{a}_j$ 的表达式中求出向量 $\boldsymbol{b}$ 的表达式并把求得的表达式代进 $\boldsymbol{a}_i$ 的表达式中去.

657. **提示**. 在向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 之前添写 $\boldsymbol{b}_1$ 并划掉能用其前面的向量线性表达的向量; 在这样得到的组之前添写 $\boldsymbol{b}_2$ 并再次划去能用其前面的向量线性表达的各向量, 等等.

利用前题.

658. **提示**. 利用习题 653 和 657.

659. **提示**. 认定给定的子组是有序的, 在这子组之后将向量组的所有向量都添写上, 并划去能用其前面的向量线性表达的各向量.

662. 不能选出此种数.

664. **提示**. 当证明(3)时利用习题 663 以及习题 658 的(c).

665. $\lambda=15$. 666. $\lambda$ 是任何数.

667. $\lambda$ 是任何数. 668. $\lambda$ 不等于 12.

669. 不存在这种 $\lambda$ 值.

670. 在习题 665 中向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 共面(即位于一个平面内), 但不共线(即不位于一条直线上). 当 $\lambda=15$ 时向量 $\boldsymbol{b}$ 落入上述平面且可用 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 表达之, 而当 $\lambda\neq 15$ 时向量 $\boldsymbol{b}$ 不位于这平面内且不能用这些向量表达. 在

习题 666 中向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 不共面且三维空间的任何向量可用它们线性表达之．在习题 667 中向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 不共线且位于平面 $4x_1-3x_2=0$ 内．对 $\lambda$ 的任何值向量 $\boldsymbol{b}$ 位于同一平面内且可用 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 线性表达之．

在习题 668 中向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 不共线，而向量 $\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 共面．当 $\lambda=12$ 时向量 $\boldsymbol{a}_3$ 与 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 共面且向量 $\boldsymbol{b}$ 不能用 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 表达．当 $\lambda\neq12$ 时向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 不共面且 $\boldsymbol{b}$ 可用它们表达之．

在习题 669 中向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 位于平面 $3x_2-x_3=0$ 内．随着 $\lambda$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的变化，向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点描画出平行于这平面的直线 $x_2=2,x_3=5$，向量 $\boldsymbol{b}$ 无论对怎样的 $\lambda$ 值都不位于上述平面内且不能用 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 表达之．

672．这种组有四个：(1)$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_3$；(2)$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_4$；(3)$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$；(4)$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4$．

673．(1)$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$；(2) $\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$．

674．任何两个向量组成基底．

675．(1)$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_4$；(2)$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4$；(3)$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$．

676．任何三个向量，除 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_5$ 和 $\boldsymbol{a}_3$、$\boldsymbol{a}_4$、$\boldsymbol{a}_5$ 外，组成基底．

677．唯一的基底在下列且仅在下列情形发生：或者整个组与基底重合，或者组内不在基底中出现的所有向量都等于零．

678．两个基底．

679．例如，向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4$ 组成基底；$\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$．

680．向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 组成基底之一；$\boldsymbol{a}_4=2\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3$．

681．向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_5$ 组成基底之一；$\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_5$，$\boldsymbol{a}_4=3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_5$．

682．**提示**．在证明(1)时把表达式

$$\boldsymbol{x}_i=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}\boldsymbol{x}_j\quad(i=r+1,\ r+2,\ \cdots,\ n)$$

代进等式

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\boldsymbol{x}_j=0,$$

并证明

$$\alpha_j=-\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i\lambda_{ij},\quad j=1,2,\cdots,r.$$

由此证明：如果 $\boldsymbol{a}_i=(-\lambda_{i,1},\ -\lambda_{i,2},\ \cdots,\ -\lambda_{i,r},\ 0,\ \cdots,1,\ \cdots,\ 0)$，$i=r+1,r+2,\cdots,n$，其中等于 1 的坐标取第 $(r+i)$ 个位置，且 $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,$

$\alpha_n$), 则 $\alpha = \sum\limits_{i=r+1}^{n} a_i\alpha_i$.

当证明(2)—(4)时利用习题664.

683. $2f_1-3f_2-f_3=0$,

$f_1-3f_2+f_4=0$.

684. $f_1-2f_2-f_3=0$,

$f_1-3f_2+f_4=0$,

$3f_1-8f_2-f_5=0$.

685. 组线性无关. 线性关系的基本组不存在.

686. $2f_1-f_2-f_3=0$,

$2f_1-2f_2+f_4-f_5=0$.

687. $2f_1-f_2=0$,

$f_1-f_3-f_4+f_5=0$.

688. **提示.** 利用习题661或657.

689. 例如, 通解: $x_1=\frac{x_3-9x_4-2}{11}$, $x_2=\frac{-5x_3+x_4+10}{11}$; 特解: $x_1=-1, x_2=1, x_3=0, x_4=1$.

690. 例如, 通解: $x_3=22x_1-33x_2-11$, $x_4=-16x_1+24x_2+8$; 特解: $x_1=2, x_2=1, x_3=x_4=0$.

691. 通解: $x_3=1-3x_1-4x_2$, $x_4=1$; 特解: $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=1$.

692. 组是不相容的.

693. 组有唯一解 $x_1=3, x_2=2, x_3=1$.

694. 通解: $x_3=6-15x_1+10x_2$, $x_4=-7+18x_1-12x_2$; 特解: $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=-1$.

695. 通解: $x_3=\frac{34x_1-17x_2-29}{5}$, $x_4=\frac{16x_1-8x_2-16}{5}$; 特解: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=\frac{22}{5}$, $x_4=\frac{8}{5}$.

696. 通解: $x_3=2-\frac{27}{13}x_1+\frac{9}{13}x_2$, $x_4=-1+\frac{3}{13}x_1-\frac{1}{13}x_2$; 特解: $x_1=x_2=1$, $x_3=\frac{8}{13}$, $x_4=-\frac{11}{13}$.

697. 通解：$x_1=\frac{-6+8x_4}{7}$，$x_2=\frac{1-13x_4}{7}$，$x_3=\frac{15-6x_4}{7}$；特解：$x_1=-2$，$x_2=2$，$x_3=3$，$x_4=-1$.

698. 组不相容.

699. 通解：$x_3=-1-8x_1+4x_2$，$x_4=0$，$x_5=1+2x_1-x_2$；特解：$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=-1$，$x_4=0$，$x_5=1$.

700. 通解：$x_3=13$，$x_4=19-3x_1-2x_2$，$x_5=-34$；特解：$x_1=1$，$x_2=8$，$x_3=13$，$x_4=0$，$x_5=-34$.

701. 通解. $x_3=-\frac{9}{2}-x_1-2x_2$，$x_4=-\frac{25}{2}-2x_1-4x_2$，$x_5=-\frac{15}{2}-2x_1-4x_2$；特解：$x_1=1$，$x_2=-3$，$x_3=\frac{1}{2}$，$x_4=-\frac{5}{2}$，$x_5=\frac{5}{2}$.

702. 通解：$x_3=\frac{4}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2$，$x_4=-\frac{14}{3}x_1-\frac{7}{3}x_2-1$，$x_5=\frac{4}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+2$；特解：$x_1=x_2=1$，$x_3=2$，$x_4=-8$，$x_5=4$.

703. 组有唯一解：$x_1=3$，$x_2=0$，$x_3=-5$，$x_4=1$.

704. 组不相容.

705. **提示**. 当证明自由未知量个数 $n-r$ 的最小性时，利用非齐次和相应的齐次方程组解之间的联系以及下列事实：齐次组之可能取任意彼此无关值的未知量的数目，等于线性无关解的最大个数，从而与这些未知量的选择无关.

706. $x_1=\frac{3}{2}x_4+\frac{31}{6}$，$x_2=\frac{2}{3}$，$x_3=-\frac{1}{2}x_4-\frac{7}{6}$.

707. $x_1=x_4-\frac{53}{18}x_5+\frac{20}{9}$，$x_2=-\frac{5}{2}x_4+\frac{5}{6}x_5-\frac{5}{3}$，$x_3=\frac{2}{9}x_5-\frac{1}{9}$.

708. 组不相容.

709. 组有唯一解：$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=-4$，$x_4=-3$.

710. $x_1=-\frac{12}{205}$，$x_2=\frac{176}{123}+\frac{4}{3}x_3$，$x_4=\frac{97}{205}$. 此处 $x_3$ 是自由未知量.

711. $x_1=-\frac{1}{2}-\frac{7}{12}x_2-\frac{3}{4}x_3-\frac{7}{8}x_5$，$x_4=1-\frac{1}{2}x_5$，其中 $x_2$，$x_3$，$x_5$ 是自由未知量.

712. 当 $\lambda\neq0$ 时组不相容. 当 $\lambda=0$ 时组相容且通解为

$$x_1=\frac{-5x_3-13x_4-3}{2},\quad x_2=\frac{-7x_3-19x_4-7}{2}.$$

713. 当 $\lambda=0$ 时组不相容. 当 $\lambda\neq0$ 时组相容，且通解为 $x_1=\frac{4-\lambda}{5\lambda}-\frac{3}{5}x_3$, $x_2=\frac{9\lambda-16}{5\lambda}-\frac{8}{5}x_3$, $x_4=\frac{1}{\lambda}$.

714. 当 $\lambda=1$ 时组不相容. 当 $\lambda\neq1$ 时组相容，且通解为 $x_1=\frac{43-8\lambda}{8-8\lambda}-\frac{9}{8}x_3$, $x_2=\frac{5}{4-4\lambda}+\frac{1}{4}x_3$, $x_4=-\frac{5}{\lambda-1}$.

715. 组对任何 $\lambda$ 值相容. 当 $\lambda=8$ 时通解为 $x_2=4+2x_1-2x_4$, $x_3=3-2x_4$, 其中 $x_1$, $x_4$ 是自由未知量. 当 $\lambda\neq8$ 时通解为 $x_1=0$, $x_2=4-2x_4$, $x_3=3-2x_4$, 其中 $x_4$ 是自由未知量.

716. 组对任何 $\lambda$ 值相容. 当 $\lambda=8$ 时，通解为 $x_3=-1$, $x_4=2-x_1-\frac{3}{2}x_2$, 其中 $x_1,x_2$ 是自由未知量. 当 $\lambda\neq8$ 时通解为 $x_2=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x_1$, $x_3=-1$, $x_4=0$, 其中 $x_1$ 是自由未知量.

717. 当 $(\lambda-1)(\lambda+2)\neq0$ 时组有唯一解: $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{\lambda+2}$. 当 $\lambda=1$ 时通解为 $x_1=1-x_2-x_3$, 其中 $x_2$ 和 $x_3$ 是自由未知量. 当 $\lambda=-2$ 时组不相容.

718. 当 $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq0$ 时组有唯一解: $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{\lambda+3}$. 当 $\lambda=1$ 时通解为 $x_1=1-x_2-x_3-x_4$, 其中 $x_2,x_3,x_4$ 是自由未知量. 当 $\lambda=-3$ 时组不相容.

719. 当 $\lambda(\lambda+3)\neq0$ 时组有唯一解: $x_1=\frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_2=\frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_3=\frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$. 当 $\lambda=0$ 和 $\lambda=-3$ 时组不相容.

720. 当 $\lambda(\lambda+3)\neq0$ 时组有唯一解: $x_1=2-\lambda^2$, $x_2=2\lambda-1$, $x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1$. 当 $\lambda=0$ 时通解为: $x_1=-x_2-x_3$, 其中 $x_2$, $x_3$ 是自由未知量. 当 $\lambda=-3$ 时通解为 $x_1=x_2=x_3$, 其中 $x_3$ 是自由未知量.

721. 如果 $a,b,c$ 两两不同，则组有唯一解:

$$x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},\quad y=\frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)},\quad z=\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

如果在数 $a, b, c, d$ 之中仅有两个不同，并且 $a\neq b$ 或者 $a\neq c$ 或者 $b\neq c$，则解依赖一个参数．例如：在 $d=a\neq b=c$ 的情形下通解为 $x=\frac{(b-d)}{b-a}=1$，$y=\frac{a-c}{b-a}z$，其中 $z$ 是自由未知量，它起着上述决定着解的参数的作用．

如果 $a=b=c=d$，则解依赖于两个参数，例如，通解为 $x=1-y-z$，其中 $y, z$ 是自由未知量．如果在 $a, b, c$ 中两个是不相同的且 $d$ 不等于它们中的任何一个，或者如果 $a=b=c\neq d$，则组是不相容的．

722．当 $D=abc-a-b-c+2\neq 0$ 时组有唯一解：

$$x=\frac{(b-1)(c-1)}{D},\quad y=\frac{(a-1)(c-1)}{D},\quad z=\frac{(a-1)(b-1)}{D}.$$

在这情形下任何两个未知量可以同时有零值，并且第三个未知量与相应的参数等于 1．例如，$x=y=0, z=c=1$．如果 $D=0$，又如果数 $a, b, c$ 中的一个且仅一个异于 1，则解依赖于一个参数；例如，当 $a\neq b=c=1$ 时通解为 $x=0$，$y=1-z$．在这情形下一个或两个未知量必定等于零．

如果 $a=b=c=1$，则通解为 $x=1-y-z$，并且未知量中一个或两个可能等于零．如果 $D=0$ 且数 $a, b, c$ 中任何一个不等于 1，则组不相容．$D=0$ 并且数 $a, b, c$ 中的一个且仅一个等于 1 的情形是不可能的．

723．如果 $D=abc-a-b-c+2\neq 0$，则组有唯一解：

$$x=\frac{abc-2bc+b+c-a}{D},\quad y=\frac{abc-2ac+a+c-b}{D},$$

$$z=\frac{abc-2ab+a+b-c}{D}.$$

如果 $D=0$ 且数 $a, b, c$ 中仅一个异于 1，则解依赖一个参数，例如，当 $a\neq b=c=1$ 时通解为 $x=1$，$y=-z$，其中 $z$ 是自由未知量．如果 $a=b=c=1$，则解依赖于两个参数且通解为 $x=1-y-z$，其中 $y, z$ 是自由未知量．如果 $D=0$，并且数 $a, b, c$ 都异于 1，则组不相容．$D=0$ 且数 $a, b, c$ 中仅一个等于 1 的情形是不可能的．**提示．**在数 $a, b, c$ 都异于 1 的条件下而 $D=0$ 的情形，为了证明组的不相容性，可证明下列恒等式成立：$D-D_x=2(b-1)(c-1)$，$D-D_y=2(a-1)(c-1)$，$D-D_z=2(a-1)(b-1)$，其中 $D_x, D_y, D_z$ 分别是上述 $x, y, z$ 的表达式中的分子．

724．例如，通解：$x_1=8x_3-7x_4$，$x_2=-6x_3+5x_4$．基础解系：

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|
| 8 | −6 | 1 | 0 |
| −7 | 5 | 0 | 1 |

725. 通解：$x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2$，$x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$. 基础解系：

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $-\frac{5}{2}$ | $+\frac{7}{2}$ |
| 0 | 1 | $+5$ | $-7$ |

726. 通解：

$$x_4 = -\frac{9x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4};$$

$$x_5 = \frac{3x_1 + 2x_2 + 4x_3}{4}.$$

基础解系：

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $-\frac{9}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| 0 | 1 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 0 | 1 | $-2$ | 1 |

727. 组仅有零解. 基础解系不存在.

728. 通解：

$$x_4 = \frac{-9x_1 + 3x_2 - 10x_3}{11};$$

$$x_5 = \frac{-3x_1 + x_2 + 4x_3}{11}.$$

基础解系：

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $\frac{9}{11}$ | $-\frac{3}{11}$ |
| 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{11}$ | $\frac{1}{11}$ |
| 0 | 0 | 1 | $-\frac{10}{11}$ | $\frac{4}{11}$ |

729. 组仅有零解.

730. 通解:

$$x_1 = x_4 - x_5;\quad x_2 = x_4 - x_6;\quad x_3 = x_4.$$

基础解系:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $-1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

731. 通解:

$$x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{x_3 - 2x_5}{3},\quad x_4 = 0,$$

其中 $x_3$, $x_5$ 是自由未知量. 基础解系:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 |

732. 通解:

$$x_1 = -3x_3 - 5x_5,\quad x_2 = 2x_3 - 3x_5,\quad x_4 = 0,$$

其中 $x_3$, $x_5$ 是自由未知量. 基础解系:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $-3$ | 2 | 1 | 0 | 0 |
| $-5$ | 3 | 0 | 0 | 1 |

735. $x_1=13c$, $x_2=2c$, $x_3=7c$.

736. $x_1=4c_1$, $x_2=8c_2$, $x_3=-3c_1+3c_2$, $x_4=c_1-c_2$.

737. $x_1=2c_1$, $x_2=c_2$, $x_3=3c_3$, $x_4=-3c_1-c_2-4c_3$, $x_5=-c_3$.

738. $x_1=14c_1$, $x_2=42c_2$, $x_3=42c_3$, $x_4=-3c_1+3c_2-9c_3$, $x_5=-8c_1+8c_2-10c_3$.

739. $x_1=c_1-7c_2$, $x_2=2c_1+6c_2$, $x_3=c_1+3c_2$, $x_4=-4c_1$, $x_5=-5c_2$.

740. $x_1=11c_1$, $x_2=33c_2$, $x_3=-24c_1-57c_2$, $x_4=5c_1+5c_2$, $x_5=-c_1-c_2$.

741. 矩阵$A$的行不组成基础解系. 矩阵$B$的行组成基础解系.

742. 第四行同前三行中的任何两行组成基础解系, 而行的共他组不组成基础解系.

743. **提示**. 在习题的第一部分中, 应用习题 734 的结果. 在第二部分中证明: 如果某解系中自由未知量的值给出线性相关的行, 则整个解系就是线性相关的.

748. **提示**. 在组的矩阵之上面添写矩阵中任何一行并将所得矩阵的行列式按第一行展开. 利用习题 746.

749. 特解: $x_1=-2$, $x_2=-6$, $x_3=7$. 通解: $x_1=-2c$, $x_2=-6c$, $x_3=7c$.

750. 特解: $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=0$. 通解: $x_1=3c$, $x_2=-2c$, $x_3=0$.

751. 特解: $x_1=-6$, $x_2=11$, $x_3=-9$, $x_4=4$. 通解: $x_1=6c$, $x_2=-11c$, $x_3=9c$, $x_4=-4c$.

752. 特解: $x_1=3$, $x_2=0$, $x_3=4$, $x_4=0$. 通解: $x_1=3c$, $x_2=0$, $x_3=4c$, $x_4=0$.

754. (a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=2b_i$ $(i=1, 2, \cdots, s)$,

(b) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda b_i \qquad (i=1, 2, \cdots, s)$.

755. 在两种情形，给定组的齐次性是必要且充分的条件。

756. 条件是：给定的线性组合的系数之和等于1.

757. 任何解中的第一个未知量取值零. 如果除第一个未知量和(例如)第二个未知量外的所有未知量的系数等于零，则第二个未知量取确定的值，此值可以由包含第二个未知量非零系数的方程中抛掉所有具有其他未知量的项求出；在这情形，从第三个开始的所有的未知量可以取任何值. 但是如果至少遇到三个未知量(例如 $x_1$、$x_2$ 和 $x_3$)具有非零系数，则所有的未知量，除第一个外，可以取任何值，并且它们的值在每一个解中用一个关系式联系着，这个关系式是从组的包含第二个未知量非零系数的任何方程中抛掉具有第一个未知量的项而得到的.

第一个未知量的所有系数等于零或者从第二个开始所有未知量的所有系数等于零，在习题的条件下是不可能的.

758. 由未知量系数组成的矩阵的秩，当划去第 $k$ 列时减小1，换句话说，第 $k$ 列不是这矩阵其余各列的线性组合. 这是充分必要条件.

759. 增广矩阵(由未知量的系数和常数项组成)的秩当划去第 $k$ 列时应当减少1.

760. $e=ad-bc=0$.

761. 一个条件是：$r$ 阶行列式 $D$ 不等于零，$(s-r)(n-r+1)$ 个条件是 $D$ 的 $(r+1)$ 阶各加边行列式等于零.

后面各条件是独立的，因为每一个条件包含一个不含于其他条件中的元素，它处于所加边的行和列的相交处且有因子 $D\neq 0$.

762. 或者至少有数 $a, b, c, d, e$ 中的两个等于$-1$，或者它们中的任何一个也不等于$-1$，但此时

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}+\frac{e}{e+1}=1.$$

763. $\lambda=af+bg+ch=0$. **提示.** 分别用 $\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t$ 乘各方程后再相加，得出 $\lambda=0$ 的条件后，组的行列式可以作为斜对称行列式按习题547计算.

764. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

765. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$

766. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$；这个条件是充分的，如果在三条平行直线的情形，认为该方向的伪点(无穷远点)是它们的公共点．如果不允许伪点，两个矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

的秩相等是充分且必要的条件．

767. 矩阵$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$的秩应当小于 3.

768. 当允许伪点时矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

的秩应当小于 3．当不允许伪点时，上列矩阵的秩应当与矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$$

的秩相同．

769. $\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0$

770. $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

771. $x^2+y^2-4x-1=0$. 中心在点$(2,0)$. 半径等于$\sqrt{5}$.

772. **提示**. 利用习题 770 的答案.

773. $\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}=0.$

774. 双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$.

775. $2x^2+7y^2+y-8=0$. 这是椭圆,中心在点$\left(0,-\frac{1}{14}\right)$,半轴长为$\frac{15}{28}\sqrt{14}$和$\frac{15}{14}$,并且长轴平行于横轴,短轴位于纵轴上。

776. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$

777. $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,$

或者 $4x+y+3z-8=0$.

778. 如果允许伪(无穷远)点,则

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0.$$

如果不允许伪点,则矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

的秩当划去最后一列时应当不变.

779. 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

的秩等于 2 且当划去最后一列时不变.

780. $$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

781. $x^2+y^2+z^2-x-2=0$. 中心位于点$\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, 半径等于$\frac{3}{2}$.

782. 具有两个未知量的三个线性方程的组, 其中增广矩阵以及任何一对方程未知量的系数构成的三个矩阵的秩都为 2.

783. 具有两个未知量的三个线性方程的组, 其中任何一对方程未知量系数构成的矩阵的秩等于 2, 而增广矩阵的秩等于 3.

784. 具有三个未知量的三个方程的组, 其中任何两个、以及所有三个方程的未知量系数构成的所有矩阵的秩都等于 2, 而增广矩阵的秩等于 3.

785. 具有三个未知量的四个线性方程的组, 其中任何三个方程的未知量的系数构成的矩阵的秩等于 3, 而增广矩阵的秩等于 4.

786. 四个平面通过一点, 并且其中任何三个都不通过一条直线.

787. 如果不考察伪(无穷远)直线和伪平面, 则形式如

$$0x+0y=a \qquad 和 \qquad 0x+0y+0z=a$$

的方程, 其中 $a$ 不等于零, 没有几何意义. 但是当 $a=0$ 时, 它们被平面内或空间内的任何点的坐标所满足. 除去这种形式的方程, 并用 $r$ 表示由未知量系数构成的矩阵的秩, 而用 $r_1$ 表示增广矩阵的秩, 对于两个未知量的组有:

1. $r=2$, $r_1=3$. 组没有解. 各直线不通过一点, 并且至少有两条直线

不同且相交.

2. $r=r_1=2$. 组有唯一解. 各直线通过一点，并且至少有两条直线是不同的.

3. $r=1$, $r_1=2$. 组没有解. 各直线平行或者重合，并且至少有两条直线不同.

4. $r=r_1=1$. 解依赖于一个参数. 所有的直线重合.

对于三个未知量的组有:

1. $r=3, r_1=4$. 组没有解. 各平面不通过一点，并且其中至少三个平面互不相同且通过一点.

2. $r=r_1=3$. 组有唯一解. 平面通过一点，并且其中至少三个不通过一条直线.

3. $r=2$, $r_1=3$. 组没有解. 各平面不通过一点，并且至少有三个平面互不相同，任何三个互不相同的平面或者没有公共点、或者通过一条直线.

4. $r=r_1=2$. 解依赖于一个参数. 所有的平面通过一条直线，并且其中至少两个互不相同.

5. $r=1, r_1=2$. 组没有解. 各平面平行或者重合，并且其中至少两个互不相同.

6. $r=r_1=1$. 解依赖于两个参数. 所有的平面重合.

## 第三章　矩阵和二次型

788. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.　　789. $\begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix}$.

790. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

791. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

792. $\begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

793. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

794. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

795. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

796. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

797. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

798. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

799. $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$.

800. $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$.

801. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$当 $n$ 是偶数，$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$当 $n$ 是奇数。

802. $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

803. $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

804. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

805. $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

806. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，其中 $n$ 是给定矩阵的阶。

807. $\begin{pmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

808. $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -922 \end{pmatrix}$.

809. $\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$.

811. (a) 乘积的第 $i$ 行和第 $j$ 行互换位置；(b) 乘积的第 $j$ 行乘以 $c$ 加到第 $i$ 行上去；(c) 乘积的第 $i$ 列和第 $j$ 列交换位置；(d) 乘积的第 $j$ 列乘以 $c$ 加到第 $i$ 列上去.

822. $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$，其中 $a$ 和 $b$ 是任何数。

823. $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$，其中 $a$ 和 $b$ 是任何数

824. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

825. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

826. $c=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$，$n$ 是矩阵 $A$ 的阶。

827.

$$f(A)=\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}.$$

828. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

830. **提示.** 把 $n$ 阶矩阵看成 $n^2$ 维向量.

831. **提示.** 利用习题 814.

**注.** 在题中假定矩阵 $A$ 和 $B$ 的元素是数. 对于特征数 $p\neq 0$ 的域结果是不正确的. 例如, 对于 $p$ 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

和

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p-1 & 0 \end{pmatrix}$$

有 $AB-BA=E$.

832. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, 其中 $a, b, c$ 是满足关系式 $a^2+bc=0$ 的任何数.

833. **提示.** 利用习题 829 证明: 如果 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $A^k=(a+d)^{k-1}A$.

834. $\pm E$ 或者 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, 其中 $a^2+bc=1$.

835. 如果 $|A|\neq 0$, 则 $X=0$; 如果 $|A|=0$, 但 $A\neq 0$, 并且矩阵 $A$ 的第一列元素与第二列对应元素之比等于 $a$, 则对任何 $x, y$,

$$X=\begin{pmatrix} x & y \\ -ax & -ay \end{pmatrix};$$

如果矩阵 $A$ 第二列的两个元素都等于零，但第一列的至少一个元素不是零，则对任何 $x, y$, $X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & y\end{pmatrix}$; 如果 $A=0$, 则 $X$ 是任何矩阵.

836. $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

837. $\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$.

838. $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

839. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

840. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$.

841. $\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$

842. $\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3}\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

843. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

844. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

845. $\begin{pmatrix}22 & -6 & -26 & 17\\ 17 & 5 & 20 & -13\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 4 & -1 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

846. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

847. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$n$ 是给定矩阵的阶。

848. $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

849. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-a)^n & (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \cdots & -a & 1 \end{pmatrix}$.

850. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

851. $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & 2(n-3) & \cdots & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & 3(n-3) & \cdots & 3 \\ n-3 & 2(n-3) & 3(n-3) & 4(n-3) & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

852. $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$.

853. $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2-n \end{pmatrix}$.

854. $-\frac{1}{a(n+a)}\begin{pmatrix} 1-n-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n-a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n-a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n-a \end{pmatrix}$.

855. $-\frac{1}{s}\begin{pmatrix} \frac{1-a_1 s}{a_1^2} & \frac{1}{a_1a_2} & \frac{1}{a_1a_3} & \cdots & \frac{1}{a_1a_n} \\ \frac{1}{a_2a_1} & \frac{1-a_2 s}{a_2^2} & \frac{1}{a_2a_3} & \cdots & \frac{1}{a_2a_n} \\ \frac{1}{a_3a_1} & \frac{1}{a_3a_2} & \frac{1-a_3 s}{a_3^2} & \cdots & \frac{1}{a_3a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_na_1} & \frac{1}{a_na_2} & \frac{1}{a_na_3} & \cdots & \frac{1-a_n s}{a_n^2} \end{pmatrix}$,

其中$s=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$.

857. $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$.

858. $\frac{1}{ns}\begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-s \end{pmatrix}$,

其中 $s=\frac{n(n+1)}{2}$.

**提示**. 在求逆矩阵第 $k$ 列元素的方程组中，从由第一个到第$(n-1)$个的每一个方程中减去下一个方程并将所得到的 $n-1$ 个方程相加. 所有的未知量用第 $k$ 个表示.

859.
$$\frac{1}{nhs}\begin{pmatrix} h-s & h+s & h & \cdots & h & h \\ h & h-s & h+s & \cdots & h & h \\ h & h & h-s & \cdots & h & h \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h+s & h & h & \cdots & h & h-s \end{pmatrix},$$

其中 $s=na+h\frac{n(n-1)}{2}$ 是给定矩阵任何一行(或列)的元素之和.

860.
$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-3} & \cdots & \varepsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \varepsilon^{-6} & \cdots & \varepsilon^{-2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-3} & \varepsilon^{-6} & \varepsilon^{-9} & \cdots & \varepsilon^{-3(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon^{-(n-1)} & \varepsilon^{-2(n-1)} & \varepsilon^{-3(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

**提示**. 写出为确定逆矩阵第 $k$ 列元素之具有未知量 $x_1, x_2, x_3\cdots, x_n$ 的各方程. 用 $\varepsilon$ 的幂乘每一个方程，使得某未知量 $x_j$ 的系数变为 1, 将所得到的各方程相加.

861. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.　862. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.　863. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

864. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.　865. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

866. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

867. 解的一般形式是

$\begin{pmatrix} \frac{2+3c_1}{2} & \frac{3+3c_2}{2} \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1$ 和 $c_2$ 是任意的数.

868. 解的一般形式是

$$\begin{pmatrix} c_1 & \frac{2-3c_1}{4} \\ c_2 & \frac{9-3c_2}{4} \end{pmatrix},$$ 其中 $c_1$ 和 $c_2$ 是任意的数。

869. 解不存在。

870. 解的一般形式是

$$\begin{pmatrix} 7-3c_1 & 5-3c_2 & 7-3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 5c_1-9 & 5c_2-3 & 5c_3-7 \end{pmatrix},$$ 其中 $c_1, c_2, c_3$ 是任意的数。

871. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

872. 在矩阵 $A^{-1}$ 中相应地：(*a*) 第 $i$ 列和第 $j$ 列互换位置；(*b*) 第 $i$ 列乘以$\frac{1}{c}$；(*c*) 从第 $j$ 列减去乘以 $c$ 的第 $i$ 列。

当矩阵 $A$ 的列变换时，矩阵 $A^{-1}$ 的行的变化与上述类似。

879. $$A^{-1}=\begin{pmatrix} E_k & -U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}.$$

881. 当 $H_1$ 左乘 $A$ 时，$A$ 的所有行向上移动一个位置，并且第一行消失，而最后一行用零的行代替。

当 $H_1$ 右乘 $A$ 时，各列向右发生类似的移动和变化。当 $H_{-1}$ 左(右)乘时，行向下(列向左)发生同种移动。

890. 例如，对下列矩阵，条件 $AB=-BA$ 满足：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**提示**. 在构造矩阵 $A$ 和 $B$ 时利用习题 1747 的提示.

897. **提示**. 利用转置伴随行列式(习题 506)的值并将本题归结到前题.

898. **提示**. 利用前题的提示.

899. **提示**. 利用习题 502 的恒等式或者习题 499 中的 Binet-Cauchy 公式.

900. **提示**. 利用习题 504 的恒等式.

901. **提示**. 利用习题 499 中的 Binet-Cauchy 公式.

902. **提示**. 利用习题 499 中的 Binet-Cauchy 公式.

903. **提示**. 利用习题 896 和 507.

904. **提示**. 利用习题 507.

905. 各对角线元素等于 $\pm 1$.

906. 各对角线元素的模等于 1.

913. **提示**. 利用在习题 499 中给出的 Binet-Cauchy 公式或者该习题的提示.

915. **提示**. 利用前题.

920. **提示**. 利用习题 913.

921. **提示**. 应用 Laplace 定理, Cauchy-Bunyakovsky 不等式和 Binet-Cauchy 公式(参看习题 503 和 499).

922. **提示**. 令 $n$ 是 $A, B, C$ 的行数; $k$ 是 $B$ 的列数, $l$ 是 $C$ 的列数. 在 $k+l>n$ 的情形验证不等式成立和 $A$ 的秩 $<k+l\leqslant n$.

证明: 当 $k+l=n$ 时习题与前题一致. 验证: 在 $k+l\leqslant n$ 和补充条件 $B'\cdot C=0$ 下不等式变为等式. 最后, 如果 $A$ 的秩 $=k+l<n$, 借助 $n-k-l$ 个线性无关的列补充 $A$ 成为方阵 $(A, D)=P=(B, Q)$, 其中 $Q=(C, D)$, $A'D=0$ (利用构造具有矩阵 $A'$ 的齐次方程组的基础解系的方法, 这是可以作到的), 应用前一情形于矩阵 $P=(A, D)$ 和 $Q=(C, D)$ 并注意到 $P=(B, Q)$ 和 $|D'D|>0$.

923. **提示**. 多次应用前题的不等式.

924. **提示**. 重复应用习题 922 的不等式.

925. **提示**. 应用与在习题 922 提示中所进行的类似的讨论.

926. **提示**. 重复应用前题的不等式并利用习题 532 的答案.

927. 交换第 $i$ 行和第 $j$ 行或者第 $i$ 列和第 $j$ 列, 可用乘以下一矩阵而得到; 这个矩阵的元素 $p_{kk}=1$ 对不等于 $i, j$ 的 $k$; $p_{ij}=p_{ji}=1$, 而所有其

余的元素是零.

用数 $c\neq 0$ 乘第 $i$ 行(或列)，可用乘以下一矩阵而得到：这个矩阵与单位矩阵的差别只是主对角线的第 $i$ 个元素 $a_{ii}$ 等于 $c$. 将第 $j$ 行乘以数 $c$ 加到第 $i$ 行，可用下一矩阵左乘而得到：这矩阵与单位矩阵的差别只是元素 $p_{ij}=c$.

对于列的类似变换需要乘以类似的矩阵，其中 $p_{ji}=c$.

**提示.** 为了确定所求矩阵的形式，对单位矩阵完成给定的初等变换，在行变换的情形该单位矩阵的阶等于矩阵 $A$ 的行数，在列变换的情形等于 $A$ 的列数. 验证所得到的矩阵满足习题的要求.

928. **提示.** 利用习题 927 并证明：(a) 型的变换可以用一些(b)和(c)型的变换代替.

929. **提示.** 利用习题 617 和 927.

930. **提示.** 利用习题 623.

931. **提示.** 应用习题 929 于矩阵 $A$ 并利用习题 915, 930 和 914.

933. **提示.** 利用习题 927.

934. $\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -\dfrac{23}{2} & -1 & 2 & \dfrac{7}{2} \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

935. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{9}{4} & \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

936. $\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{7}{6} & \dfrac{10}{3} \\ -\dfrac{7}{6} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{6} & -\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

938. **提示.** 为了证明必要性取矩阵 $A$ 的任一非零列作为 $B$.

939. **提示.** 当证明必要性时取矩阵$A$的任何$r$线性无关列所成的矩阵作为$B$; 用矩阵$B$的各列表达$A$的第$i$列的表达式中的系数, 组成矩阵$C$的第$i$列. 利用习题914.

941. **提示.** 利用习题626和931.

943. **提示.** 用整数初等变换把给定矩阵$A$化成法式矩阵. 为此, 在不等于零的元素中选出按绝对值最小者, 用整数初等变换的方法, 将这个元素所在的行和列的各元素用除以这个元素所得的余数来替换. 这样重复下去, 直到第$i$行和第$j$列的所有元素, 除去$a_{ij}$外, 都变为零. 如果某一元素$a_{kl}$在新矩阵中不被$a_{ij}$整除, 则将第$k$行加到第$i$行并再次改用余数. 这样重复下去, 直到某第$p$行和第$q$列的所有元素, 除$a_{pq}$外, 都是零且所有其余元素都能被$a_{pq}$整除. 然后把$a_{pq}$移到左上角, 并对划去第一行和第一列所得到的矩阵开始类似的变换, 等等. 为了证明法式的唯一性, 假定秩为$r$的矩阵$A$具有$m$行$n$列, 用$d_k$表示$A$的所有$k$阶子式的最大公因子, $k=1, 2\cdots, r$, 而当$r<k\leqslant m, n$时令$d_k=0$. 证明: 当进行整数初等变换时, 子式因子$d_k$不变, 并证明等价于$A$的法式矩阵的主对角线元素$e_1, e_2, \cdots$, 与子式因子有下列等式联系着: $d_k=e_1e_2\cdots e_k (k\leqslant m, n)$, 由此

$$e_k=\frac{d_k}{d_{k-1}}(k=1, 2, \cdots, r) \text{和 } e_k=0 \text{ 对 } r<k\leqslant m, n$$

944. **提示.** 在证明所要求的表示的可能性时利用习题927. 当证明唯一性时, 从两个表示$A=P_1R_1=P_2R_2$推出: 矩阵$C=P_2^{-1}P_1=R_2R_1^{-1}$是整数的、幺模的且是三角形的, 它的主对角线元素是正的, 这意味着, 它们等于1. 然后, 在等式$CR_1=R_2$中令第$k$行的第$(k+1)$个、第$(k+2)$个、等等元素相等, 证明: 矩阵$C$主对角线之右的所有元素等于零, 即$C=E$.

945. **提示.** 利用习题927.

949. **解.** 用行的下列初等变换把矩阵$A$化成上三角形矩阵$C$: $a_{11}=d_1\neq 0$. 把第一行乘以各适当数从其他各行中减去, 把矩阵$A$化为形式

$$A^1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^1 & a_{n3}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{pmatrix},$$

因为此时包含第一行的各子式不变, 所以$d_2=a_{11}a_{22}^1\neq 0$, 由此: $a_{22}^1\neq 0$. 把矩阵$A^1$的第二行乘以各适当因子从以下各行中减去, 使得这些行的第二个元

素变为零，等等．在 $r$ 步之后，把前 $r$ 列位于对角线以下的所有元素变为零．因为所得到的矩阵 $A^{(r)}=C$ 的秩等于 $A$ 的秩，即等于 $r$，所以矩阵 $C$ 的后 $n-r$ 行的所有元素等于零，从而 $C$ 是上三角形矩阵．由于习题 927，$C=PA$，其中 $P$ 是一系列下三角形矩阵的乘积，即 $P$ 也是下三角形矩阵．$A=P^{-1}C=BC$，其中 $B=P^{-1}$ 是下三角形矩阵．以此证明了形式如(2)的展开式的存在性．

令已给定任何形式如(2)的表示法．按照矩阵乘积的子式的公式(习题 913)有：

$$A\begin{pmatrix}1, 2, \cdots, k-1, i\\ 1, 2, \cdots, k-1, k\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k} B\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k-1, & i\\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_{k-1}, & j_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1, j_2, \cdots, j_{k-1}, j_k\\ 1, \ 2, \ \cdots, k-1, k\end{pmatrix}.$$

但是矩阵 $C$ 的前 $k$ 列只包含一个异于零的 $k$ 阶子式，所以：

$$A\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k-1, & i\\ 1, & 2, & \cdots, & k-1, & k\end{pmatrix}$$

$$=B\begin{pmatrix}1, 2, \cdots, k-1, i\\ 1, 2, \cdots, k-1, k\end{pmatrix}C\begin{pmatrix}1, 2, \cdots, k\\ 1, 2, \cdots, k\end{pmatrix}$$

$$=b_{11}b_{22}\cdots b_{k-1,k-1}b_{ik}c_{11}c_{22}\cdots c_{kk}$$

$$(i=k, k+1, \cdots, n;\ \ k=1, 2, \cdots, r). \qquad \text{(a)}$$

这里置 $i=k$，求得：

$$d_k=b_{11}b_{22}\cdots b_{kk}c_{11}c_{22}\cdots c_{kk} \qquad (k=1, 2, \cdots, r). \qquad \text{(b)}$$

用 $d_{k-1}$ 除 $d_k$ 得到(3)．用(b)除(a)得到公式(4)中的第一个公式．第二个公式类似地可以得到．

令 $D$ 是具有主对角线元素 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的任何非奇异对角形矩阵．则 $A=BC=(BD)(D^{-1}C)$．矩阵 $BD$ 由 $B$ 用 $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ 乘各列而得到．矩阵 $D^{-1}C$ 由 $C$ 用 $D_1^{-1}, D_2^{-1}, \cdots, D_n^{-1}$ 乘各行而得到．因此 $B$ 和 $C$ 的对角线元素可以在条件(3)下选为任意的．在乘积 $BC$ 中，$B$ 的后 $n-r$ 列的元素乘以 $C$ 的后 $n-r$ 行的元素．所以如果这些元素中有一些假定等于零，则另一些可以取为任意的．

951．**提示**．应用习题 949 的解并证明：在条件 $b_{kk}=c_{kk}=\sqrt{\dfrac{d_k}{d_{k-1}}}$ 下条件(3)满足且条件(4)给出：

$$b_{ik}=c_{ki}(i=k+1, k+2, \cdots, n;\ \ k=1, 2, \cdots, r).$$

952. $AB=C=(C_{ij})$,

其中
$$C_{11}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix},\quad C_{12}=\begin{pmatrix}2&4\\9&6\end{pmatrix},$$
$$C_{21}=(8),\qquad C_{22}=(9,\ 1),$$
$$C=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2&4\\9&9&6\\8&9&1\end{pmatrix}.$$

954. **提示**. 考察第 $i$ 个小块行与第 $j$ 个小块列的乘积.

957. $P$ 是方形分块矩阵,其沿主对角线的是 $m_1, m_2, \cdots, m_s$ 阶的方形单位小块, 并且处于第 $i$ 个小块行和第 $j$ 个小块列相交处的小块与矩阵 $X$ 一样,而所有其余非对角线小块等于零. 类似地, $Q$ 是主对角线上为 $n_1, n_2, \cdots, n_t$ 阶的方形单位小块的分块矩阵,在第 $j$ 个小块行和第 $i$ 个小块列相交处的是矩阵 $Y$,在其他地方是零小块.

958. **提示**. 从第二小块行减去左乘以矩阵 $CA^{-1}$ 的第一小块行,并利用前题证明:此时秩不变.

959. **解**. 把矩阵 $R$ 变为 $R_1$ 的那些初等变换,把矩阵
$$T=\begin{pmatrix}A&B\\-C&-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$
变为矩阵
$$T_1=\begin{pmatrix}A_1&B_1\\0&X-CA^{-1}B\end{pmatrix}.$$
按前题 $T$ 的秩等于 $n$. 因为初等变换不改变矩阵的秩, 所以 $T_1$ 的秩等于 $T$ 的秩即等于 $n$, 且 $A_1$ 的秩等于 $A$ 的秩即等于 $n$. 因此
$$X-CA^{-1}B=0,\quad X=CA^{-1}B.$$

960.
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-20&8&11\\17&-7&-9\\-2&1&1\end{pmatrix}.$$

961. $x=1, y=2, z=3$.

962. $X=\begin{pmatrix}9&8\\2&3\end{pmatrix}$.

963. **解**. 性质($a$)和($b$)容易从 Kronecker 乘积的定义推出. 为证明($c$),作为 Kronecker 乘积元素的下标将不写出对的号码, 而写对本身(并且

一个对的数将不加括号地接连写出)．假定 $AB=F, CD=G, F\times G=H$, $A\times C=P, B\times D=Q$. 则 $h_{i_1i_2, j_1j_2}=f_{i_1, j_1}g_{i_2, j_2}=\sum_{s=1}^{m}a_{i_1, s}b_{s, j_1}\sum_{t=1}^{n}c_{i_2, t}d_{t, j_2}$

$=\sum_{s, t}a_{i_1, s}c_{i_2, t}b_{s, j_1}d_{t, j_2}=\sum_{s, t}p_{i_1i_2, st}q_{st, j_1j_2}$. 由此 $H=PQ$.

964. ($a$) 对右直接积需要取对的辞典排列: (1, 1), (1, 2), ⋯, (1, $n$), (2, 1), (2, 2), ⋯, (2, $n$), ⋯, ($m$, $n$). 对左直接积则需要取排列(1, 1), (2, 1), ⋯, ($m$, 1), (1, 2), (2, 2), ⋯, ($m$, 2), ⋯, ($m$, $n$), 它是同样的对从右向左读以辞典排法而得到的. 性质($b$), ($c$), ($d$)直接从定义推出. 性质($e$)从前题关系式($c$)和本题($d$)推出. 左乘积的各性质借助关系式($b$)从右乘积的相应性质推出.

965. **提示.** 证明:对的编号改变不改变行列式$|A\times B|$,并利用习题 963 的性质($c$), 把它表为$|A\times B|=|(AE_m)\times(E_nB)|=|A\times E_n|\cdot|E_m\times B|=|A'\times E_n|\cdot|E_m\times 'B|$.

966. **提示.** 利用在习题 630 已证明了的命题: 由 $|A|=0$ 推出 $\hat{A}$的秩 $\leqslant 1$.

967. **解.** 置 $AB=C$ 并分别用 $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$ 表示矩阵 $A$, $B$, $C$ 第 $i$ 行和第 $j$ 列元素的代数余子式,而用 $M_{ij}, N_{ij}, P_{ij}$ 表示其子式.

此时, 应用两个矩阵乘积的子式用该两个矩阵子式表示的表达式(习题 913), 求得:

$$\hat{C}_{ij}=C_{ji}=(-1)^{j+i}P_{ji}=(-1)^{j+i}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}N_{ki}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}M_{jk}(-1)^{k+i}N_{ki}=\sum_{k=1}^{n}A_{jk}B_{ki}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\hat{B}_{ik}\hat{A}_{kj},$$

由此 $\hat{C}=\hat{B}\cdot\hat{A}$.

对于非奇异矩阵 $A$ 和 $B$ 可如下很容易地得到上述等式: 按前题 $\hat{A}=|A|\cdot A^{-1}$; 由此$\widehat{(AB)}=|AB|(AB)^{-1}=|A|\cdot|B|B^{-1}A^{-1}=\hat{B}\hat{A}$. 对于数值元素的矩阵,奇异矩阵的情形用极限过程得出. $\lambda$ 的多项式$|A+\lambda E|$有次数 $n$ 且有不多于 $n$ 个的根. 因此可以取数的序列

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \qquad \lim_{k\to\infty}\lambda_k=0,$$

使得矩阵 $A+\lambda_k E$ 和 $B+\lambda_k E$ 是非奇异的. 按所证明了的 $[(A+\lambda_k E)(B+\lambda_k E)]^{\wedge}=(B+\lambda_k \hat{E})\cdot(A+\lambda_k \hat{E})$. 通过取当 $k\to\infty$ 时的极限, 得到 $(\widehat{AB})=\hat{B}\hat{A}$.

968. **提示**. (a) 由习题 913 推出; (b) 对 $|A|=0$ 的情形, 利用习题 747 证明, 而对于 $|A|\neq 0$ 利用关系式 $\hat{A}=|A|\cdot CA'^{-1}C$, 其中 $C$ 是在对角线上有元素 $1, -1, 1, -1, \cdots$ 的对角形矩阵.

969. **提示**. 应用习题 913.

970. 例如, 在辞典次序下将组合编号, 在这种次序下组合 $i_1<i_2<\cdots<i_p$ 在组合 $j_1<j_2<\cdots<j_p$ 之前, 如果第一个异于零的差 $j_1-i_1$, $j_2-i_2, \cdots, j_p-i_p$ 是正的.

971. **提示**. 利用改变组合编号次序不改变相伴矩阵 $A_p$ 的行列式这一事实并应用前题, 首先对三角形矩阵 $A$ 进行证明. 借助习题 928 和 969 把一般情形归结到三角形矩阵.

972. **解**. 由于习题 969 从 $AB=E_n$ 推出 $A_pB_p=E_N$, 其中 $N=C_n^p$; 由此

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} A\begin{pmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_p \\ i_1, i_2, \cdots, i_p\end{pmatrix} B\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ k_1, k_2, \cdots, k_p\end{pmatrix}$$

$$=\begin{cases} 1, \text{如果} \sum_{s=1}^{p}(j_s-k_s)^2=0, \\ 0, \text{如果} \sum_{s=1}^{p}(j_s-k_s)^2>0 \end{cases} \left(1\leqslant \begin{matrix} j_1<j_2<\cdots<j_p \\ k_1<k_2<\cdots<k_p\end{matrix} \leqslant n\right). \tag{2}$$

另一方面, 按 Laplace 定理求得:

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} A\begin{pmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_p \\ i_1, i_2, \cdots, i_p\end{pmatrix}(-1)^{\sum_{s=1}^{p}(i_s+k_s)} \times A\begin{pmatrix} k'_1, & k'_2, \cdots, k'_{n-p} \\ i'_1, & i'_2, \cdots, i'_{n-p}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{cases} |A|, \quad \text{如果} \sum_{s=1}^{p}(j_s-k_s)^2=0, \\ 0, \quad \text{如果} \sum_{s=1}^{p}(j_s-k_s)^2>0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $i'_1<i'_2<\cdots<i'_{n-p}$ 同 $i_1<i_2<\cdots<i_p$ 一起，$k'_1<k'_2<\cdots<k'_{n-p}$ 同 $k_1<k_2<\cdots<k_p$ 一起组成下标 $1,2,\cdots,n$ 的全组.

因为具有非奇异矩阵 $A_p$ 的线性方程组在给定的常数项下有唯一解，又因为等式(3)的右端与对应的等式(2)的右端只相差因子$|A|$，所以左端也应当相差同一因子，由此就推出所要求的等式(1).

973. **提示.** 应用 Laplace 定理和习题 903.

974. **提示.** 应用 Laplace 定理和习题 903.

975. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$.

976. $\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 0 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2\end{pmatrix}$.

977. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2+5\lambda\end{pmatrix}$.

978. $\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$.

979. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

980. $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2\end{pmatrix}$.

981. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3\end{pmatrix}$.

982. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$.

983. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$.

984. **提示.** 证明：在初等变换下多项式 $D_k(\lambda)$不变以及在法对角形的情形

$$D_k(\lambda)=\prod_{i=1}^{k}E_i(\lambda)\qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

985. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\end{pmatrix}$.

986. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{pmatrix}$.

987. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$，其中 $p=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$.

988. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$，其中 $p$ 是多项式 $a, b, c, d$ 的乘积除以这些多项式首项系数的乘积所得之多项式.

989. $\begin{pmatrix} d(\lambda) & 0 \\ 0 & \dfrac{f(\lambda)g(\lambda)}{cd(\lambda)} \end{pmatrix}$，其中 $d(\lambda)$ 是多项式 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的首项系数等于 1 的最大公因式，$c$ 是多项式 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 首项系数的乘积.

990. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & fgh & 0 \\ 0 & 0 & fgh \end{pmatrix}$.

991. $\begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{fgh}{abc} & 0 \\ 0 & 0 & fgh \end{pmatrix}$，其中 $a, b, c$ 分别是 $g$ 和 $h$，$f$ 和 $h$，$f$ 和 $g$ 的最大公因式(取首项系数等于 1).

992. $\begin{pmatrix} \dfrac{abc}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{d^2fgh}{abc} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{fgh}{d} \end{pmatrix}$，其中 $d$ 是 $f, g, h$ 的最大公因式；$a, b, c$ 分别是 $g$ 和 $h$，$f$ 和 $h$，$f$ 和 $g$ 的最大公因式，并且所有多项式 $a, b, c, d$ 的首项系数等于 1.

993. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\lambda^4\end{pmatrix}$. 994. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\lambda^2&0\\0&0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$.

995. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&f(\lambda)\end{pmatrix}$, 其中 $f(\lambda)=\lambda^5+5\lambda^4+4\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1$.

996. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2\end{pmatrix}$, 如果 $\beta\neq0$; 或者

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&(\lambda+\alpha)^2&0\\0&0&0&(\lambda+\alpha)^2\end{pmatrix}$, 如果 $\beta=0$.

997. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-3&0\\0&0&(\lambda-3)^2\end{pmatrix}$. 998. $\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$.

999. $\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\&&&\ddots&\\0&&&&\lambda^n\end{pmatrix}$, 其中 $n$ 是给定矩阵的阶。

1000. 等价. 1001. 不等价.

1002. 矩阵 $A$ 和 $C$ 等价但不等价于矩阵 $B$. 1003. 单位矩阵.

1005. **提示**. 利用: 矩阵 $A$ 的一个行的初等变换可以化为用一个特别的幺模 $\lambda$ 矩阵左乘 $A$ (而列变换则为右乘). 其次, 如果 $B=P_sP_{s-1}\cdots P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t$, 其中 $P_i, Q_j$ 是特别的幺模 $\lambda$ 矩阵, 则置

$$P=P_sP_{s-1}\cdots P_1E_m \text{ 和 } Q=E_nQ_1Q_2\cdots Q_t.$$

当证明充分性时利用习题 1003 的答案.

1006.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2-1\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -2 & \lambda+3\end{pmatrix};$$

$$Q=\begin{pmatrix}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda-1\\ 1-\lambda & \frac{1}{2}\lambda^2-\lambda+\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

1007. $$B=\begin{pmatrix}\lambda+2 & 0\\ 0 & \lambda^2+4\lambda+4\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix};$$

$$Q=\begin{pmatrix}0 & -\lambda^2-2\lambda\\ -\lambda & \lambda^3+2\lambda^2+1\end{pmatrix}.$$

1008. $$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}-2\lambda-3 & 0 & 2\lambda+4\\ -3 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix};$$

$$Q=\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 & 0\\ \lambda & -\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 & 0\\ -\lambda-1 & \lambda^4-2 & 1\end{pmatrix}.$$

1009. 例如:

$$P=\begin{pmatrix}-3\lambda^2+9\lambda-8 & 3\lambda^2-9\lambda+4\\ -2\lambda^2+6\lambda+5 & 2\lambda^2-6\lambda+3\end{pmatrix};$$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

1010. 例如:

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad Q=\begin{pmatrix}-\lambda^2+\lambda+1 & -2\lambda^2+\lambda+2\\ \lambda-1 & 2\lambda-1\end{pmatrix}.$$

1011. 例如:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 11\lambda+8 & -11 & 0\\ 2\lambda-1 & -2 & 1\end{pmatrix};$$

$$Q=\begin{pmatrix}-2\lambda-1 & -\lambda-1 & -\lambda^2+\lambda\\ 2\lambda^2+\lambda+2 & \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^3-\lambda^2-1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1012. 例如:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3\lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & 1 \\ -6\lambda^2-4\lambda+4 & 2\lambda^2+2\lambda-1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda-1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ -\lambda-2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda & \lambda^2+1 \end{pmatrix}.$$

1013. 例如:

$$P=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad Q=\begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1014. 例如:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Q=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1015. $E_1(\lambda)=1; E_2(\lambda)=(\lambda-1); E_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2-1)$

1016. $E_1(\lambda)=\lambda+1; E_2(\lambda)=\lambda^2-1; E_3(\lambda)=\lambda^3-\lambda.$

1017. $E_1(\lambda)=\lambda^2+1; E_2(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1; E_3(\lambda)=E_4(\lambda)=0.$

1018. $E_1(\lambda)=1; E_2(\lambda)=\lambda^2-\lambda+1; E_3(\lambda)=\lambda^3+1; E_4(\lambda)=0.$

1019. $E_1(\lambda)=\cdots=E_n(\lambda)=1; E_{n+1}(\lambda)=\lambda^{n+1}.$

1020. $E_1(\lambda)=\cdots=E_{n-1}(\lambda)=1, E_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$, 如果 $\beta\neq 0$; $E_1(\lambda)=\cdots=E_n(\lambda)=\lambda-a$, 如果 $\beta=0$.

**提示**. 当 $\beta\neq 0$ 证明: 子式因子 $D_{n-1}(\lambda)=1$. 为此检验: 划去第一列和最后一行所得到的子式当 $\lambda=a$ 时不变为零.

1021. $\lambda+1, (\lambda-1)^2$. 1022. $\lambda+1, \lambda-1, \lambda-1$.

1023. 初等因子不存在.

1024. $\lambda+1, (\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda+2, \lambda+2, \lambda-2$.

1025. 初等因子不存在.

1026. 在有理数域: $\lambda^2+1, \lambda^2-3$; 在实数域: $\lambda^2+1$, $\lambda+\sqrt{3}$, $\lambda-\sqrt{3}$; 在复数域: $\lambda+i$, $\lambda-i$, $\lambda+\sqrt{3}$, $\lambda-\sqrt{3}$.

1027. 在有理数域: $\lambda^2-2, (\lambda^2+4)^2, \lambda^2+4$; 在实数域: $\lambda+\sqrt{2}$, $\lambda-\sqrt{2}$, $(\lambda^2+4)^2, \lambda^2+4$; 在复数域: $\lambda+\sqrt{2}$, $\lambda-\sqrt{2}$, $(\lambda+2i)^2$, $(\lambda-2i)^2$,

$\lambda+2i$, $\lambda-2i$.

1028. 在有理数域和在实数域: $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)^2$, $\lambda+1$, $(\lambda^2-\lambda+1)^2$, $\lambda^2-\lambda+1$; 在复数域: $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)^2$, $\lambda+1$, $\left(\lambda-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$, $\left(\lambda-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2$, $\lambda-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

1029. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1030. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2-4\lambda-8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^6-12\lambda^4+48\lambda^2-64 \end{pmatrix}$.

1031. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^5+\lambda^4-5\lambda^3-\lambda^2+8\lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1032. **提示.** 令 $e(\lambda)$ 是包含于至少一个对角线元素分解式中的某个不可约因子, $s$ 是异于零的对角线元素个数, 且 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_s$ 是 $e(\lambda)$ 在这些元素中的幂的指数的全体. 证明: 当 $k=1,2,\cdots,s$ 时子式因子 $D_k(\lambda)$ 恰好被 $[e(\lambda)]^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}$除尽, 而不变因子 $E_k(\lambda)$ 恰好被 $[e(\lambda)]^{\alpha_k}$ 除尽.

1033. **提示.** 用初等变换把每一个对角线小块化到对角形 (例如, 化到法对角形) 并利用前题.

1034. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+1)^3(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$.

1035. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3-4\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-4\lambda^2 \end{pmatrix}$.

1036. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [f(\lambda)]^2 \end{pmatrix}$, 其中 $f(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-6\lambda$.

1037. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^2-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1)^3 \end{pmatrix}$.

1038. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1039. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1040. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-6 \end{pmatrix}$.

1041. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1042. $D_1=1$, $D_2=2$, $D_3=4$, $D_4=320$.

1043. $D_1=3$, $D_2=18$, $D_3=324$, $D_4=11664$.

1045. **提示.** 当证明该形式的表示法的存在性时，利用前题. 当证明唯一性时，由该形式的两个表示法 $A=P_1R_1=P_2R_2$ 推出：矩阵 $C=P_2^{-1}P_1=R_2R_1^{-1}$ 是幺模的和三角形的 $\lambda$ 矩阵，它的各主对角线元素首项系数等于 1，这意味着它们本身也等于 1. 然后，在等式 $CR_1=R_2$ 中使第 $k$ 行各元素相等并注意到关于 $R_1$ 和 $R_2$ 各元素的幂的条件，证明：矩阵 $C$ 主对角线之右的所有元素等于零，即 $C$ 是单位矩阵. 由此得到等式 $P_1=P_2$ 和 $R_1=$

$R_2$.

1047. 例如:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1048. 纯量矩阵. **提示**. 证明: 如果对任何非奇异矩阵$T$而言 $AT=TA$, 则这对于所有矩阵$T$是正确的。为此, 将奇异矩阵$T$表为形式 $T=(T-\alpha E)+\alpha E$, 其中 $\alpha\neq 0$ 且选择使得 $|T-\alpha E|\neq 0$. 然后应用习题 818.

**注**. 上述解的方法对具有有限域元素的矩阵可能是不适用的, 在该域中可能找不到具有所需性质的元素 $\alpha$. 对具有任何域元素的矩阵适用的并且不利用习题 818 的方法如下: 对 $i\neq j$ 用 $F_{ij}$ 表示一矩阵, 它与单位矩阵的差别仅在于它在第 $i$ 行和第 $j$ 列处的那个元素等于 1. 在等式 $AF_{ij}=F_{ij}A$ 中使第 $i$ 行和第 $j$ 列的各元素相等, 然后在第 $i$ 行和第 $i$ 列这样做.

1049. 由单位矩阵交换第 $i$ 行和第 $j$ 行所得到的矩阵可以取为矩阵 $T$.

1050. **提示**. 利用前题.

1058. $A=(B-\lambda E)\begin{pmatrix} 2\lambda+1 & \lambda & 1 \\ 3\lambda+2 & 3\lambda & 2 \\ \lambda+2 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1059. $A=\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ 2\lambda^2 & 3\lambda & 2 \\ \lambda^2 & \lambda & -2 \end{pmatrix}(B-\lambda E)+\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

1060. **提示**. 利用习题 1005.

1061. **解**. 令 $P=(B-\lambda E)P_1+P_0$ 和 $Q=Q_1(B-\lambda E)+Q_0$. 利用这些关系式, 等式

$$B-\lambda E=P(A-\lambda E)Q \tag{1}$$

可以化为

$$B-\lambda E-P_0(A-\lambda E)Q_0=P(A-\lambda E)Q_1(B-\lambda E)$$
$$+(B-\lambda E)P_1(A-\lambda E)Q-(B-\lambda E)P_1(A-\lambda E)Q_1(B-\lambda E).$$

根据等式(1)有

$$P(A-\lambda E)=(B-\lambda E)Q^{-1},\quad (A-\lambda E)Q=P^{-1}(B-\lambda E),$$

将它们代入上式得到:

$$B-\lambda E-P_0(A-\lambda E)Q_0$$
$$=(B-\lambda E)[P_1P^{-1}+Q^{-1}Q_1-P_1(A-\lambda E)Q_1](B-\lambda E).$$

这等式右端方括号中的表达式应当等于零，因为否则的话右端关于$\lambda$的幂不低于2，然而左端的幂不高于1．所以$B-\lambda E=P_0(A-\lambda E)Q_0$．在这等式中令$\lambda$的系数和常数项相等，求得：

$$P_0Q_0=E \text{ 和 } B=P_0AQ_0.$$

1063．相似．1064．相似．1065．矩阵$A$和$C$相似，但它们不相似于$B$.

1066．矩阵$B$和$C$相似，但它们不相似于矩阵$A$.

1067．例如，$T=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$．**提示**．为了得到尽可能简单的答案，需要力求实行矩阵$A-\lambda E$和$B-\lambda E$列的最简单的初等变换．

1068．例如，$T=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$．**提示**．为把矩阵$A-\lambda E$化为法对角形，从乘以6的第二行减去乘以$\lambda+16$的第一行，而从乘以6的第一列减去乘以$\lambda-17$的第二列．类似地变换矩阵$B-\lambda E$.

1069．例如，

$$T=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1070．**提示**．可以作为行列式$|A-\lambda E|$中包含$k$个主对角线元素的各乘积的所有因子当$\lambda=0$时之和，而得到$c_k$①.

1071．$\lambda_1=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$．**提示**．应用前题．

1074．**提示**．将习题1070应用于矩阵$B=A-\lambda_0E$，并证明：矩阵$B$的特征多项式$|B-\mu E|$在进行替换$\mu=\lambda-\lambda_0$后变为矩阵$A$的特征多项式$|A-\lambda E|$.

1075．对于形如

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

的三角形矩阵，其中当$a_{i,i+1}\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$时有$d=1$．对于$n$阶对角形矩阵，其中当$p$个主对角线元素等于$\lambda_0$时有$d=p$.

---

① 参看 Ф. Р. Гантмахер 著，柯召译，《矩阵论》，69页——译注．

1076. **提示.** 证明:

$$|A^{-1}-\lambda E|=(-1)^n|A^{-1}|\cdot|A-\frac{1}{\lambda}E|.$$

1077. **提示.** 将等式

$$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda),$$
$$|A+\lambda E|=(\lambda_1+\lambda)(\lambda_2+\lambda)\cdots(\lambda_n+\lambda)$$

相乘并用 $\lambda$ 替换 $\lambda^2$.

1078. **提示.** 将等式 $|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$ 与由它用 $\lambda e_1$, $\lambda e_2$, $\cdots$, $\lambda e_{p-1}$ 替换 $\lambda$ 所得到的所有等式相乘, 其中 $e_k=\cos\frac{2\pi k}{p}+i\sin\frac{2\pi k}{p}(k=1,2,\cdots,p-1)$, 并且在所得到的等式中用 $\lambda$ 代替 $\lambda^p$.

1079. **解.** 令 $f(\lambda)=a_0\prod_{j=1}^{s}(\lambda-\mu_j)$, 此外, $\varphi(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda)$. 在 $f(\lambda)$ 中置 $\lambda=A$ 得到: $f(A)=a_0\prod_{j=1}^{s}(A-\mu_jE)$. 由矩阵转到行列式, 求得:

$$|f(A)|=a_0^n\prod_{j=1}^{s}|A-\mu_jE|=a_0^n\prod_{j=1}^{s}\varphi(\mu_j)$$
$$=a_0^n\prod_{j=1}^{s}\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\mu_j)=\prod_{i=1}^{n}\left[a_0\prod_{j=1}^{s}(\lambda_i-\mu_j)\right]$$
$$=\prod_{i=1}^{n}f(\lambda_i).$$

另一方面, $|f(A)|=a_0^n\prod_{j=1}^{s}\varphi(\mu_j)=R(f,\varphi)$.

1080. **提示.** 将前题的等式应用于多项式 $g(x)=f(x)-\lambda$, 其中 $\lambda$ 是一个任意的数.

1081. **提示.** 应用等式 $|f(A)|=\frac{|g(A)|}{|h(A)|}$ 并利用习题 1079 和 1080.

1082. **提示.** 如果至少矩阵 $A$, $B$ 中的一个是非奇异的, 则论断从矩阵 $AB$ 和 $BA$ 的相似性推出(参看习题 1047). 在一般情形可以应用习题 920 和 1070. 对于具有无穷多(或者相当多)个元素的域上的矩阵, 从所要求的等式对非奇异矩阵成立推出它恒等地成立. 最后, 对具有数值元素的矩阵, 对于

奇异矩阵 $A$ 的等式可以用取极限的方法而得到. 例如, 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是奇异矩阵 $A$ 的特征值, 则这样选择数列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$, 使得它们全都与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 不同且 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$. 矩阵 $A_k=A-\varepsilon_k E$ 是非奇异的. 所以, $|A_kB-\lambda E|=|BA_k-\lambda E|$. 通过取 $k\to\infty$ 时的极限, 便得出需要的等式.

1083. 特征值是(考虑到重复): $\lambda_k=f(\varepsilon_k)$, 其中 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$ 以及 $\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$. **提示.** 将习题 479 中循环式的表达式应用于循环式 $|A-\lambda E|$, 其中 $\lambda$ 是参数.

1084. **解.** 将习题 304 应用于行列式 $|A-\lambda E|$, 其中 $\lambda$ 是特征值, 置 $\alpha+\beta=-\lambda$, $\alpha\beta=-1$. 于是 $|A-\lambda E|=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\beta^n$. 从 $\alpha\beta=-1$ 求得 $\alpha\neq 0$ 和 $\beta\neq 0$. 其次 $\alpha\neq\beta$, 因为从 $\alpha=\beta$ 和 $|A-\lambda E|=0$ 就要推出 $\alpha=\beta=0$. 因此, $|A-\lambda E|=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=0$, 由此, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}=1$; $\frac{\alpha}{\beta}=\cos\frac{2\pi k}{n+1}+i\sin\frac{2\pi k}{n+1}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$, $k\neq 0$, 因为 $\frac{\alpha}{\beta}\neq 1$. 解出这个方程与 $\alpha\beta=-1$ 联立, 求得: $\alpha=\pm i\left(\cos\frac{\pi k}{n+1}+i\sin\frac{\pi k}{n+1}\right)$, $\beta=\pm i\left(\cos\frac{\pi k}{n+1}-i\sin\frac{\pi k}{n+1}\right)$. 此处符号 $\pm$ 对 $\alpha$ 和 $\beta$ 要取得一样, 因为 $\alpha\beta=-1$. 由此, $\lambda=-(\alpha+\beta)=\mp 2i\cos\frac{\pi k}{n+1}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$. 所有这些数都应当是特征值. 但在它们中有相同的, 因为 $\cos\frac{\pi k}{n+1}=-\cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}$.

所有的互异的特征值包括在组

$$\lambda_k=2i\cos\frac{\pi k}{n+1}\quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

之中. 但是特征多项式的次数等于 $n$, 这样, 最后这个组包括了所有的特征值, 并且没有重根.

1085. **提示.** 证明: 对角线元素为 $a$ 的 $k$ 阶 Jordan 小块有唯一的初等因子 $(\lambda-a)^k$.

构造 Jordan 矩阵 $A_J$, 它的 Jordan 小块与矩阵 $A-\lambda E$ 的初等因子的联系如上所述, 利用习题 1033 和 1061, 证明矩阵 $A$ 和 $A_J$ 相似. 当证明唯一性时, 利用习题 1005, 确信: 两个相似的 Jordan 矩阵 $B$ 和 $C$ 的特征矩阵是等价的, 并由于矩阵 $B-\lambda E$ 和 $C-\lambda E$ 的初等因子相同, 再次应用习题 1033,

确信：矩阵$B$和$C$精确到小块的次序是相同的。

1086. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$.

1087. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&5\end{pmatrix}$.

1088. 问题提得不正确，四阶矩阵$A-\lambda E$不能有这样的不变因子。

1090. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

1091. $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

1092. $\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&1\\0&0&-3\end{pmatrix}$.

1093. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1094. $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

1095. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1096. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1097. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

1098. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1099. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

1100. $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

1101. $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}$.

1102. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$.

1103. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$, 其中 $\varepsilon=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ 是$\sqrt[3]{1}$的复值之一.

1104. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}$.

1105. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1106. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1107. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1108. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1109. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1110. 与习题 1109 的一样. 1111. 与习题 1109 一样.

1112. $\begin{pmatrix} n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$.

1113. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

1114. $\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$, 其中 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 是

$\sqrt[n]{a^n}$ 的所有值，即 $a_k=a\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

1115. 主对角线上为数 $a$ 的一个 Jordan 小块.

1118. 在有理数域内相似于矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

1119. 在实数域内相似于矩阵

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

1120. 在复数域内相似于矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2+3i & 0\\ 0 & 0 & 2-3i\end{pmatrix}.$$

1121. 在任何域内也不相似于对角形阵.

1125. 主对角线元素等于零或者 1 的对角形矩阵.

1126. 主对角线元素为 ±1 的对角形矩阵. 注. 论断对特征数 2 的域上的矩阵不正确. 例如，$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2=E$ 且矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$不能化到对角形(由于 Jordan 形的唯一性).

1127. 如果 $n$ 是矩阵 $A$ 的周期，即使 $A^k=E$ 成立的自然数 $k$ 中最小者，则对角形阵在主对角线上有$\sqrt[n]{1}$的 $n$ 个根中的某些个. 注. 对于有限特征数的域上的矩阵，结果不正确，例如对于特征数 $p$ 的域上的阶 $\leqslant p$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

等式 $A^p=E$ 成立.

1128. (a) $\lambda-1$; (b) $\lambda$.

1129. 对于纯量矩阵 $A=aE$ 且仅仅对于它们. 对于给定的阶 $n$ 此种矩阵只有一个.

1130. $(\lambda-a)^n$. 1134. $\lambda^2-4\lambda+4$. 1135. $\lambda^2-5\lambda+6$.

1136. 例如，对于矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^4$, $\psi(\lambda)=(\lambda-1)^2$，但由于任何矩阵的 Jordan 形的唯一性，这两个矩阵不相似.

1137.
$$\begin{pmatrix} \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} & C_k^3\alpha^{k-3} & \cdots & C_k^{n-1}\alpha^{k-n+1} \\ 0 & \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k+2} & \cdots & C_k^{n-2}\alpha^{k-n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha^k \end{pmatrix},$$

当 $k\leqslant n-1$ 这里应置 $C_k^0=1$，而当 $k<s$ 置 $C_k^s=0$.

1138. **提示.** 置$A=\alpha E+H$并在等式 $f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots+\frac{f^{(s)}(\alpha)}{s!}(x-\alpha)^s$（$s$ 是多项式 $f(x)$ 的次数）中置$x=A$.

1140. 在对角线上为数 $\alpha^2$ 的一个 Jordan 小块.

1141. 如果对角线上为零的 Jordan 小块 $A$ 的阶 $n>1$，则矩阵 $A^2$ 的 Jordan 形由对角线元素为零的两个小块组成，当 $n$ 是偶数时小块的阶为 $\frac{n}{2}$，当 $n$ 是奇数时阶为 $\frac{n-1}{2}$，$\frac{n+1}{2}$.

**提示.** 利用习题 1130，求矩阵 $A$ 和 $A^2$ 的最小多项式并证明：矩阵 $A^2$ 的 Jordan 形的小块的阶对偶数 $n$ 不超过 $\frac{n}{2}$，对奇数 $n$ 不超过 $\frac{n+1}{2}$. 验证：矩阵 $A^2-\lambda E$ 的子式因子 $D_{n-2}(\lambda)$ 等于 1，然后证明：矩阵 $A^2$ 的 Jordan 形包含不多于两个小块.

1143. 所求矩阵包含对角线上为数 $\alpha$ 的两个 Jordan 小块，对偶数 $n$ 它们的阶为 $\frac{n}{2}$，对奇数 $n$ 它们的阶为 $\frac{n-1}{2}$ 和 $\frac{n+1}{2}$. **提示.** 应用前两题.

1144. **解.** 令 $A=TBT^{-1}$，其中 $A$ 是给定的矩阵且

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

是它的 Jordan 形，后者具有 Jordan 小块

$$B_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{pmatrix}(i=1,2,\cdots,k).$$

此时 $A'=T'^{-1}B'T'$. 令

$$H_i=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

其阶数与 $B_i$ 相同，又令

$$H=\begin{pmatrix}H_1 & & & 0\\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_k\end{pmatrix}.$$

用直接相乘求得：$B_i'=H_i^{-1}B_iH_i$. 这意味着 $B'=H^{-1}BH$. 所以 $A'=T'^{-1}H^{-1}BHT'=T'^{-1}H^{-1}T^{-1}ATHT'=C^{-1}AC$, 其中 $C=THT'$ 是对称的非奇异的矩阵. 置 $D=C^{-1}A$. 此时 $D'=A'C'^{-1}=C^{-1}ACC^{-1}=D$. 这样，矩阵 $D$ 也是对称的且 $A=CD$.

1145. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $A$ 的特征值（考虑到它们的重复），则矩阵 $A_p$ 的特征值（也考虑到它们的重复）等于 $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_p}$ $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n)$，即由矩阵 $A$ 的特征值中取 $p$ 个的所有可能的乘积.

**提示.** 阐明：当由 $n$ 个数 $1, 2, \cdots, n$ 每次取 $p$ 个的组合编号改变时，矩阵 $A_p$ 变为与其相似的矩阵，利用习题 970，转到 Jordan 形 $A_J$ 并应用习题 969 中相伴矩阵的性质.

1146. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 是 $A$ 的特征值，$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_q$ 是 $B$ 的特征值，则 $A\times B$ 的特征值等于 $\lambda_i\mu_j (i=1, 2, \cdots, p;\ j=1, 2, \cdots, q)$.

**解.** 令 Kronecker 乘积 $A\times B$ 为数对 $(i, j)$ $(i=1, 2, \cdots, p;\ j=1, 2, \cdots, q)$ 的排列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{pq}$ 所决定. $\alpha_i$ 和 $\alpha_j$ 的对换在矩阵 $A\times B$ 中引起第 $i$ 行和第 $j$ 行以及第 $i$ 列和第 $j$ 列的交换，这意味着，这个矩阵变为与其相似的矩阵（习题 1049）. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{pq}$ 的任何重新排列归结为一系列对换，所以一切 Kronecker 乘积 $A\times B$ 的特征值是一样的且可以考察，例如，右直接积 $A\times{}'B$（习题 964）. 令 $A$ 等于 $C^{-1}A_JC$ 和 $B=D^{-1}B_JD$, 其中 $A_J$ 和 $B_J$ 是 Jordan 矩阵. 应用习题 963 性质(c)，求得：$A\times{}'B=C^{-1}A_JC\times{}'D^{-1}B_JD$

$=(C^{-1}\times' D^{-1})(A_j\times' B_j)(C\times' D)$. 按照习题964性质(e)有：$C^{-1}\times' D^{-1}=(C\times' D)^{-1}$. 所以，矩阵 $A\times' B$ 和 $A_j\times' B_j$ 相似且它们的特征值相同. 但 $A_j\times' B_j$ 是主对角线上有元素 $\lambda_i\mu_j(i=1,2,\cdots,p;\ j=1,2,\cdots,q)$ 的三角形矩阵，这就证明了论断.

1147. 提示. 证明：$g(A)=h(A)$ 当且仅当 $g(\lambda)-h(\lambda)$ 被 $\psi(\lambda)$ 除尽.

1149. 在给定的情形最小多项式与特征多项式相同（精确到符号），而 $r(\lambda)$ 是通常的 Lagrange 插值多项式，

$$f(A)=\sum_{k=1}^{n}f(\lambda_k)\frac{(A-\lambda_1E)\cdots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\cdots(A-\lambda_nE)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $A$ 的特征值（按题设条件，是互异的）.

1150. $r(\lambda)$ 是通常的 Lagrange 插值多项式，

$$f(A)=\sum_{k=1}^{s}f(\lambda_k)\frac{(A-\lambda_1E)\cdots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\cdots(A-\lambda_sE)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_s)}.$$

1151. 解. 首先证明：如果 Lagrange-Sylvester 插值多项式 $r(\lambda)$ 存在，则它为等式(1)和(2)决定. 令

$$\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\alpha_{k,1}}{(\lambda-\lambda_k)^{r_k}}+\cdots+\frac{\alpha_{k,r_k}}{(\lambda-\lambda_k)}\right] \tag{3}$$

是部分分式展开式. 用 $\psi(\lambda)$ 乘这个等式，便得到等式(1). 为了确立等式(2)，用 $(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$ 乘等式(3)，得到：

$$\frac{r(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}=\alpha_{k,1}+\alpha_{k,2}(\lambda-\lambda_k)+\cdots+\alpha_{k,r_k}(\lambda-\lambda_k)^{r_k-1}+(\lambda-\lambda_k)^{r_k}\varphi(\lambda), \tag{4}$$

其中 $\varphi(\lambda)$ 是当 $\lambda=\lambda_k$ 时连同其所有导数有意义的一个有理函数. 在等式(4)两端取在 $\lambda=\lambda_k$ 的 $(j-1)$ 阶导数并且利用 $r(\lambda)$ 和 $f(\lambda)$ 在矩阵 $A$ 的谱上的值是相同的这一事实，就得到等式(2). 其次证明：由等式(1)和(2)决定的多项式 $r(\lambda)$，是函数 $f(\lambda)$ 在矩阵 $A$ 的谱上的 Lagrange-Sylvester 插值多项式. 从等式(1)显见：$r(\lambda)$ 的次数低于 $\psi(\lambda)$ 的次数. 另外，置

$$\varphi_k(\lambda)=\alpha_{k,1}+\alpha_{k,2}(\lambda-\lambda_k)+\cdots+\alpha_{k,r_k}(\lambda-\lambda_k)^{r_k-1}.$$

从等式(2)推出：当 $\lambda=\lambda_k$ 时函数 $\varphi_k(\lambda)$ 和它的 $j<r_k$ 阶导数的值分别与函数 $\dfrac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}$ 及其同阶导数的值相同. 所以在等式 $r(\lambda)=\sum\limits_{k=1}^{s}\varphi_k(\lambda)\psi_k(\lambda)$

以及由它用 $j$ 次微分($j<r_k$)所得到的等式中置 $\lambda=\lambda_k$, 得到:

$$r^{(j)}(\lambda_k)=f^{(j)}(\lambda_k) \qquad (j=0, 1, \cdots, r_k-1; k=1, 2, \cdots, s),$$

即 $r(\lambda)$ 和 $f(\lambda)$ 在矩阵谱上的值相同.

1152. $f(A)=[aE+b(A-\lambda_1E)](A-\lambda_2E)^3+[cE+d(A-\lambda_2E)+e(A-\lambda_2E)^2](A-\lambda_1E)^2$, 其中 $a=\frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}$,

$$b=-\frac{2}{(\lambda_1-\lambda_2)^4}f(\lambda_1)+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}f'(\lambda_1),$$

$$c=\frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},$$

$$d=-\frac{2}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f(\lambda_2)+\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f'(\lambda_2),$$

$$e=\frac{3}{(\lambda_2-\lambda_1)^4}f(\lambda_2)-\frac{2}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f'(\lambda_2)+\frac{1}{2!}\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f''(\lambda_2).$$

1154. 提示. 证明: $f(\lambda)$ 在矩阵 $A$ 谱上的 Lagrange-Sylvester 插值多项式 $r(\lambda)$ 的值与 $f(\lambda)$ 在每一个小块 $A_k$ 的谱上的值相同, 并应用习题 1147.

1155. $r(\lambda)=f(0)+f'(0)\lambda+\frac{f''(0)}{2!}\lambda^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\lambda^{n-1}$.

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(0) & f'(0) & \frac{f''(0)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(0) & f'(0) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(0) \end{pmatrix}.$$

对任何使得值 $f(0), f'(0), \cdots, f^{(n-1)}(0)$ 有定义的函数 $f(\lambda)$, $f(A)$ 有意义.

1156. $r(\lambda)=f(a)+f'(a)(\lambda-a)+\frac{f''(a)}{2!}(\lambda-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(\lambda-a)^{n-1}$.

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(a) & f'(a) & \frac{f''(a)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \\ 0 & f(a) & f'(a) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(a) \end{pmatrix}.$$

对于任何使得值 $f(a), f'(a), \cdots, f^{(n-1)}(a)$ 存在的函数 $f(\lambda)$，$f(A)$ 有意义。

1160. **提示**. 应用前题.

1162. $\begin{pmatrix} 3\cdot 2^{100}-2\cdot 3^{100} & 2(3^{100}-2^{100}) \\ -3(3^{100}-2^{100}) & 3^{101}-2^{101} \end{pmatrix}$.

1163. $2^{50}\begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$. 1164. $\pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

1165. $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; 总共四个矩阵。

1166. $\begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix}$. 1167. $\begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$.

1168. $\begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix}=(e-2)A^2+A+E.$

1169. $\begin{pmatrix} 3 & -15 & 6 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, 如果取对数的实值.

通解有形式 $\begin{pmatrix} 3+2\pi in & -15 & 6 \\ 1 & -5+2\pi in & 2 \\ 1 & -5 & 2-2\pi in \end{pmatrix}$,

其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 $n$ 是任何整数.

1170. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1171. **提示**. 利用习题 1159. 1172. **提示**. 利用习题 1159.

1173. $|e^A|=e^s$, 其中 $s=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 是矩阵 $A$ 的迹.

1174. **提示**. 利用习题 1161.

1175. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. 1176. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 1177. $y_1^2-y_2^2$.

1178. $y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2$. 1179. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

1180. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; $x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{5}{6}y_3$, $x_2=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{6}y_3$, $x_3=\frac{1}{3}y_3$.

1181. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; $x_1=\frac{1}{2}y_1+y_2$, $x_2=y_2+y_3$, $x_3=-y_2+y_3$.

1182. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$.

1183. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, y_1 - \frac{5}{3}\sqrt{3}\, y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y_3$,

$x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y_3$.

1184. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{6}\sqrt{3}\, y_3$, $x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$,

$x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$.

1185. $y_1^2 - y_2^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$.

1186. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y_1 - \frac{1}{15}\sqrt{15} y_2 + \frac{2}{85}\sqrt{85} y_3 -$

$\frac{1}{629}\sqrt{629} y_4$, $x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{15} y_2 - \frac{6}{85}\sqrt{85} y_3 + \frac{3}{629}\sqrt{629} y_4$, $x_3 = \frac{1}{17}\sqrt{85} y_3 +$

$\frac{6}{629}\sqrt{629} y_4$, $x_4 = \frac{1}{37}\sqrt{629} y_4$.

1187. $2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2$; $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_3$, $y_3 = \frac{1}{10}x_3$.

1188. $3y_1 - 30y_2^2 - 530y_3^2$; $y_1 = x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3$, $y_2 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{20}x_3$,

$y_3 = \frac{1}{20}x_3$.

1189. $2y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_4^2$; $y_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3$,

$y_3 = \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{2}x_4$, $y_4 = \frac{3}{2}x_4$.

1190. $x_1 = y_1 - 3y_2 - 6y_3$, $x_2 = y_2 + 3y_3$, $x_3 = y_3$.

1191. $x_1 = 2\sqrt{2}\, y_1 + \sqrt{2}\, y_2 + 5y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, y_1 + y_3$, $x_3 = y_3$.

1192. $x_1 = y_3$, $x_2 = \sqrt{2}\, y_2 + y_3$, $x_3 = \sqrt{2}\, y_1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\, y_2$

$-\left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) y_3$.

1193. $y_1^2$; $y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$; $y_2 = x_2$; $y_3 = x_3$; $\cdots$; $y_{i-1} = x_{i-1}$;

$y_i = x_1$; $y_{i+1} = x_{i+1}$; $\cdots$; $y_n = x_n$, 如果 $a_i \neq 0$.

1194. $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2 + \cdots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$;

$$y_1=x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3+\cdots+x_n),$$

$$y_2=x_2+\frac{1}{3}(x_3+x_4+\cdots+x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=x_n.$$

1195. $y_1^2-y_2^2-y_3^2-\frac{3}{4}y_4^2-\frac{4}{6}y_5^2-\frac{5}{8}y_6^2-\cdots-\frac{n-1}{2(n-2)}y_n^2;$

$$y_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+x_3+x_4+\cdots+x_n,$$

$$y_2=\frac{1}{2}(x_1-x_2),$$

$$y_3=x_3+\frac{1}{2}(x_4+x_5+\cdots+x_n),$$

$$y_4=x_4+\frac{1}{3}(x_5+x_6+\cdots+x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=x_n.$$

**提示.** 归结到前题.

1196. 如果 $n$ 是偶数: $y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{n-1}^2-y_n^2;$

$$y_i=\frac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{2}\quad(i=1, 3, 5, \cdots, n-3);$$

$$y_i=\frac{x_{i-1}-x_i+x_{i-1}}{2}\ (i=2, 4, 6, \cdots, n-2);$$

$$y_{n-1}=\frac{x_{n-1}+x_n}{2};\quad y_n=\frac{x_{n-1}-x_n}{2}.$$

如果 $n$ 是奇数: $y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2;$

$$y_i=\frac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{2}\ (i=1, 3, 5, \cdots, n-2),$$

$$y_i=\frac{x_{i-1}-x_i+x_{i+1}}{2}\ (i=2, 4, 6, \cdots, n-1);$$

$$y_n=x_n.$$

1197.

$$\frac{n-1}{n}y_1^2+\frac{n-2}{n-1}y_2^2+\cdots+\frac{2}{3}y_{n-2}^2+\frac{1}{2}y_{n-1}^2;$$

$$y_1=x_1-\frac{x_2+x_3+\cdots+x_n}{n-1},$$

$$y_2=x_2-\frac{x_3+x_4+\cdots+x_n}{n-2},$$

$$y_{n-1}=x_{n-1}-x_n,$$

$$y_n=x_n.$$

**提示**. 把型表成形式 $f_1=\frac{n-1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2}{n}\sum_{i<j}^{n}x_ix_j$ 并应用归纳法. 另外的方法如下：实行变换 $z_1=x_1-s$, $z_2=x_2-s$, $\cdots$, $z_{n-1}=x_{n-1}-s$, $z_n=x_n$ 并将这些等式相加，把型 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-s)^2$ 化为：$2\left(\sum_{i=1}^{n-1}z_i^2+\sum_{i<j}^{n-1}z_iz_j\right)$. 利用习题 1194 的答案, 得到：$2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2+\frac{4}{3}y_3^2+\cdots+\frac{n}{n-1}y_{n-1}^2$. 此时新旧未知量间的联系比较复杂.

1198. $(n-1)y_1^2-y_2^2-y_3^2-\cdots-y_n^2$;

$$y_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

$$y_2=\frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3-\cdots+x_n),$$

$$y_3=\frac{1}{2}(-x_1-x_2+x_3-\cdots-x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=\frac{1}{2}(-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}+x_n).$$

逆变换有形式：$x_1=y_1-y_2, x_2=y_2-y_3, \cdots, x_{n-1}=y_{n-1}-y_n, x_n=y_1+y_n$.
**提示**. 应用变换

$$z_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$z_2=x_2+x_3+\cdots+x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n=x_n.$$

1199. 证明与惯性定律的证明类似.

1200. **提示**. 利用前题.

1201. 型 $f_1$ 和 $f_3$ 彼此等价但不等价于型 $f_2$.

1202. 型 $f_2$ 和 $f_3$ 彼此等价但不等价于型 $f_1$.

1203. 在复数域 $n+1$；在实数域 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

1204. 秩是偶数，符号差等于零.

1205. $\left[\frac{n-|s|}{2}\right]+1$，其中$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数.

1210. **提示**. 为了证明论断(b)，考察型 $f_\varepsilon=f+\varepsilon g$，其中 $\varepsilon>0$ 且 $g$ 是未知量的平方的和. 当证明必要性时验证：$f_\varepsilon>0$ 且对型 $f$ 和 $f_\varepsilon$ 的相应的主子式 $D$ 和 $D_\varepsilon$ 成立：$D=\lim\limits_{\varepsilon\to0}D_\varepsilon$. 当证明充分性时，按 $\varepsilon$ 的幂展开 $D_\varepsilon$，验证 $D_\varepsilon>0$，并证明：对未知量的任何值成立：$f=\lim\limits_{\varepsilon\to0}f_\varepsilon$. **例子**. 型 $f_1=-x_2^2$ 或者非退化的型 $f_2=-x_2^2+2x_1x_3$ 有非负的角子式，但型本身不是非负的.

当证明论断(c)时应用习题 1208.

当证明论断(d)时应用习题 916，并把 $f$ 化到标准形式，证明：$A=D'BD=(BD)'(BD)$，其中 $D$ 是变换的矩阵，而 $B$ 是在标准形下型的矩阵.

1212. $\lambda>2$. 1213. $|\lambda|<\sqrt{\frac{5}{3}}$. 1214. $-0.8<\lambda<0$.

1215. 所要求的 $\lambda$ 值不存在.

1216. 不存在.

1217. **提示**. 令 $g=f+l^2$，其中 $l=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$. 改变未知量的次序，化到情形 $c_n\neq0$，实行变换 $y_i=x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，$y_n=\frac{l}{c_n}$并证明：对新的型 $D_{g_1}=D_{f_1}+c_n^2D_{n-1}$，其中 $D_{n-1}$ 是型 $f_1$ 的 $n-1$ 阶角子式.

1218. **提示**. 把型 $f$ 表为

$$f=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+f_1(x_2,\cdots,x_n),$$

同时利用前题，证明：$D_f=a_{11}D_{f_1}\leqslant a_{11}D_\varphi$.

1219. **提示**. 利用给定型的典则形式.

1220. **解**. 显然 $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$. 把两个型化到标准形式，求得：$f=\sum\limits_{i=1}^{r}y_i^2$，$g=\sum\limits_{j=1}^{s}z_j^2$，其中 $y_i$ 和 $z_j$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性型. 由于合成的上述性质，有：

$$(f,g)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(y_i^2,z_j^2).$$

考察加项之一$(y^2, z^2)$，其中 $y=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$，$z=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k x_k$. 此时 $y^2=\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_k a_l x_k x_l$；$z^2=\sum\limits_{k,l=1}^{n} b_k b_l x_k x_l$；$(y^2, z^2)=\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_k a_l b_k b_l x_k x_l=\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k x_k\right)^2\geqslant 0$，对于任何实值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 由于$(f, g)\geqslant 0$，这证明了论断(a). 现在令 $f>0$ 和 $g>0$. 把型 $g$ 化到标准形式：$g=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$，其中 $y_i=\sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij} x_j$ $(i=1, \cdots, n)$ 且 $|Q|=|q_{ij}|\neq 0$. 此时$(f, g)=\sum\limits_{i=1}^{n}(f, y_i^2)$. 但是 $y_i^2=\sum\limits_{j,k=1}^{n} q_{ij} q_{ik} x_j x_k$，由此，$(f, y_i^2)=\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk} q_{ij} q_{ik} x_j x_k=\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(q_{ij} x_j)(q_{ik} x_k)\geqslant 0$，因为 $f>0$. 如果对某个 $t$ 取值 $x_t\neq 0$，则存在这样的 $i$ 使得$q_{it}\neq 0$（否则，在铅直线之间 $Q=0$）. 从而，由于 $f>0$，也有$(f, y_i^2)=\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(q_{ij} x_j)(q_{ik} x_k)>0$ 故 $(f, g)>0$.

1221. **提示**. 当证明断言(b)时，考察型 $f_k=\sum\limits_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$ $(k=1, 2, \cdots, n)$.

1222. **提示**. 条件(2)的必要性从角子式在三角形变换下不变推出(参看前题).

等式(3)用同法可证，充分性可以用对未知量的数 $n$ 的归纳法证明.

1224. $f_1=-2y_1^2+\frac{2}{3}y_2^2$; $g_1=y_1^2-y_2^2$; $x_1=y_1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\,y_2$, $x_2=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{6}\sqrt{3}\,y_2$.

1225. $f_1=y_1^2-y_2^2$; $g_1=4y_1^2-2y_2^2$; $x_1=-2\sqrt{2}\,y_1+3\sqrt{2}\,y_2$, $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}y_1-\frac{\sqrt{2}}{2}y_2$.

1226. $f_1=9y_1^2+9y_2^2-9y_3^2$; $g_1=y_1^2+y_2^2+y_3^2$; $x_1=\sqrt{2}\,y_2$; $x_2=\frac{1}{6}y_1-\frac{1}{3}\sqrt{2}\,y_3$; $x_3=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,y_2+\frac{1}{6}\sqrt{2}\,y_3$.

1227. $f_1=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$; $g_1=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$; $x_1=y_1+y_2+y_3+y_4$, $x_2=y_2-y_4$, $x_3=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3-\frac{1}{2}y_4$, $x_4=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3+\frac{1}{2}y_4$.

1228. $f_1=y_1^2+2y_2^2+2y_3^2-7y_4^2$; $g=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3+\frac{1}{3}y_4$, $x_2=\frac{2}{3}y_2-\frac{4}{3}y_3+\frac{4}{3}y_4$, $x_3=y_3-2y_4$, $x_4=y_1$.

1229. $f_1=y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$; $g_1=y_1^2+y_2^2+y_3^2$; $x_1=y_1-y_2$, $x_2=-y_2+y_3$, $x_3=-3y_2+2y_3$.

1230. **提示.** 证明：型偶的$\lambda$方程的根在未知量的任何非奇异线性变换下不变.

1231. 不可以，因为$\lambda$方程的根是$1\pm\frac{1}{2}i$.

1232. 不可以，因为$\lambda$方程的根是$\pm\frac{1}{2}i\sqrt{5}$

1233. 在适当的编号下有：$\lambda_i\mu_i=1\ (i=1,2,\cdots,n)$.

1234. $3y_1^2-y_2^2-5y_3^2$.

1235. $5y_1^2-y_2^2-2y_3^2$.

1237. 等价.

1238. 等价.

1239. $x_1=-12y_1-17y_2$, $x_2=5y_1+7y_2$.

1240. $x_1=y_1-2y_2$, $x_2=3y_1-2y_2$.

1242. **提示.** 证明：特征多项式$|A-\lambda E|$在型$f$的正交变换下不变.

1243. $4y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

1244. $6y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$.

1245. $y_1^2+\sqrt{3}y_2^2-\sqrt{3}y_3^2$.

1246. $3y_1^2+(1+\sqrt{17})y_2^2+(1-\sqrt{17})y_3^2$.

1247. $\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi k}{n+1}y_k^2$. **提示.** 考察型的二倍并以与习题1084类似的方法解之.

1248. $3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3$, $x_2=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3$, $x_3=-\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3$.

1249. $9y_1^2+18y_2^2-9y_3^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3$, $x_2=-\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+$

$\frac{2}{3}y_3$, $x_3=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$.

1250. $3y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2$.

1251. $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2$.

1252. $9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$; $x_1=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$, $x_2=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3$, $x_3=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3$.

1253. $3y_1^2-6y_2^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{6}\sqrt{2}y_2+\frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$, $x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}\sqrt{2}y_2$, $x_3=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{6}\sqrt{2}y_2-\frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$.

1254. $9y_1^2+9y_2^2-9y_3^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{2}\sqrt{2}y_2+\frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$, $x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}\sqrt{2}y_3$, $x_3=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{2}\sqrt{2}y_2+\frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$.

1255. $2y_1^2+4y_2^2-2y_3^2-4y_4^2$; $x_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3+y_4)$, $x_2=\frac{1}{2}(-y_1+y_2+y_3-y_4)$, $x_3=\frac{1}{2}(-y_1-y_2+y_3+y_4)$, $x_4=\frac{1}{2}(y_1-y_2+y_3-y_4)$.

1256. $4y_1^2+8y_2^2+12y_3^2-4y_4^2$; $x_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3+y_4)$, $x_2=\frac{1}{2}(y_1-y_2-y_3+y_4)$, $x_3=\frac{1}{2}(y_1+y_2-y_3-y_4)$, $x_4=\frac{1}{2}(y_1-y_2+y_3-y_4)$.

1257. $5y_1^2-5y_2^2+5y_3^2$; $x_1=\frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_1+y_2)$, $x_2=\frac{1}{5}\sqrt{5}(y_1-2y_2)$, $x_3=\frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_3+y_4)$, $x_4=\frac{1}{5}\sqrt{5}(-y_3+2y_4)$.

1258. $2y_1^2-4y_2^2$; $x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}(y_1+y_3)$, $x_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}(y_1-y_3)$,

$x_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(y_2+y_4),\ x_4=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(y_2-y_4)$.

1259. $9y_1^2+9y_2^2+9y_3^2$; $x_1=y_1,\ x_2=\frac{1}{3}(y_2+2y_3+2y_4),\ x_3=\frac{1}{3}(2y_2+y_3-2y_4),\ x_4=\frac{1}{3}(2y_2-2y_3+y_4)$.

1260. $5y_1^2+5y_2^2+5y_3^2-8y_4^2$; $x_1=\frac{1}{5}\sqrt{5}\,(2y_1+y_5),\ x_2=\frac{1}{5}\sqrt{5}\,(-y_1+2y_5),\ x_3=y_3,\ x_4=\frac{1}{13}\sqrt{13}(2y_2+3y_4),\ x_5=\frac{1}{13}\sqrt{13}(3y_2-2y_4)$.

1261. $4y_1^2+4y_2^2+4y_3^2-6y_4^2-6y_5^2$; $x_1=y_1,\ x_2=\frac{1}{5}\sqrt{5}\,(y_2+2y_4),\ x_3=\frac{1}{5}\sqrt{5}(-2y_2+y_4),\ x_4=\frac{1}{10}\sqrt{10}\,(y_3+3y_5),\ x_5=\frac{1}{10}\sqrt{10}\,(3y_3-y_5)$.

1262. $5y_1^2-5y_2^2+5y_3^2-5y_4^2+5y_5^2$; $x_1=\frac{1}{5}\sqrt{5}\,(2y_1+y_2),\ x_2=\frac{1}{5}\sqrt{5}\,(y_1-2y_2),\ x_3=\frac{1}{10}\sqrt{10}(3y_3+y_4),\ x_4=\frac{1}{10}\sqrt{10}(-y_3+3y_4),\ x_5=\frac{1}{5}\sqrt{5}\,(2y_5+y_6),\ x_6=\frac{1}{5}\sqrt{5}\,(y_5-2y_6)$.

1263. $\frac{n+1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\cdots+\frac{1}{2}y_n^2$; $y_1=\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1+x_2+\cdots+x_n),\ y_i=\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}}[x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}-(i-1)x_i]\ (i=2,3,\cdots,n)$.

1264. $\frac{n-1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-\frac{1}{2}y_3^2-\cdots-\frac{1}{2}y_n^2$; 变换可以取前题那个.

1265. 提示. 证明：在二次型的正交变换下，它的矩阵的特征多项式不变.

1266. 型 $f$ 和 $h$ 彼此正交等价，但它们不正交等价于型 $g$.

1267. 型 $g$ 和 $h$ 彼此正交等价，但它们不正交等价于型 $f$.

1269. $Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

1270. $Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

1271. **提示**. 利用习题 1074 的提示证明：矩阵 $A-\lambda_0E$ 的特征值由矩阵 $A$ 的特征值减去 $\lambda_0$ 而得到，并应用习题 1242.

1272. **提示**. 应用前题.

1274. 具有正角子式的矩阵是正交阵当且仅当它是单位矩阵.

1275. **解**. 具有矩阵 $A'A$ 的二次型 $f$ 是正定的(习题 1207)；这意味着，用三角形变换可以把它化到带有正系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的典则形式(习题 1222). 如果 $C$ 是这个变换的矩阵，$D$ 是对角线元素为 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$ (并且所有根值取为正的)的对角形矩阵，且 $B=DC$. 则 $A'A=C'D^2C=B'B$，其中矩阵 $B$ 满足习题的要求. 置 $Q=AB^{-1}$. 这时 $Q'Q=(AB^{-1})'\cdot(AB^{-1})=(B')^{-1}\cdot(A'A)\cdot B^{-1}=(B')^{-1}\cdot B'B\cdot B^{-1}=E$. 即矩阵 $Q$ 是正交阵且 $A=QB$. 如果还有 $A=Q_1B_1$. 则矩阵 $Q^{-1}\cdot Q_1=B(B_1)^{-1}$ 是正交的且是三角形的，对角线上元素是正的，这意味着，它是单位矩阵. 由此，$Q=Q_1$ 和 $B=B_1$.

1276. **解**. 我们对于表示式 $A=QB$ 证明论断(a). 矩阵 $A'A$ 是对称的，且具有这个矩阵的二次型是正定的(习题 1207). 所以存在这样的正交矩阵 $P$，使得 $A'A=P'CP$，其中 $C$ 是对角线上有正元素 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的对角形矩阵. 令 $D$ 是对角线上有元素 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$ 的对角形矩阵(取根的正值). 置 $B=P'DP=P^{-1}DP$. 由此推出：$B$ 是具有正特征值的对称矩阵，这意味着，具有矩阵 $B$ 的二次型是正定的且它的各角子式是正的. 其次 $A'A=P^{-1}CP=P^{-1}D^2P=P^{-1}DP\cdot P^{-1}DP=B^2$. 置 $Q=AB^{-1}$. 这时 $A=QB$ 且 $Q'Q=(AB^{-1})'\cdot(AB^{-1})=B'^{-1}(A'A)\cdot B^{-1}=B^{-1}B^2B^{-1}=E$. 就是说，矩阵 $Q$ 是正交阵.

假定我们有两个所要求形式的表示：$A=Q_1B_1=Q_2B_2$. 这时 $A'A=B_1^2=B_2^2$. 分别用 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$；$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ 表示 $A'A$、$B_1$、$B_2$ 的特征值，并且是在不增的次序下排列的. 所有这些数是正的且 $\mu_i^2=\lambda_i=\nu_i^2$ ($i=1, 2, \cdots, n$) (习题 1077). 就是说，$\mu_i=\nu_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$). 令 $C$ 和 $D$ 是对角线上元素为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 和 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 的对角形矩阵. 存在这样的正交矩阵 $U$ 和 $V$ 使得：$B_1=U'DU$，$B_2=V'DV$. 从而，$B_1^2=$

$U'CU$, $B_2^2=V'CV$; 由此, $U'CU=V'CV$, $CUV'=UV'C$. 矩阵 $W=(w_{ij})_1^n=UV'$ 与 $C$ 是可换的. 现在证明: 它与 $D$ 可换. 如果 $\lambda_i\neq\lambda_j$, 则算出矩阵 $CW=WC$ 在第 $i$ 行和第 $j$ 列的元素我们求得 $w_{ij}=0$. 这样, 如果把矩阵 $C$ 表为对角线小块为 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的分块对角形矩阵, 使得在每一个小块中各对角线元素是同样的, 而在不同的小块中是不同的, 则矩阵 $W$ 是对角线小块为 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ 的分块对角形阵, 其中 $W_1, \cdots, W_k$ 与 $C_1, \cdots, C_k$ 的阶一样. 按矩阵 $D$ 的构造, 它也是分块对角形阵, 其对角线小块是 $D_1, D_2, \cdots, D_k$, 阶数与上述相同, 并且在每个小块中有相等的对角线元素. 因为 $D_iW_i=W_iD_i$ $(i=1, 2, \cdots, k)$, 所以 $DW=WD$. 由此, $DUV'=UV'D$; $U'DU=V'DV$, 即 $B_1=B_2$.

利用矩阵函数可以简化证明. 如果 $A=QB$ 是所求的表达形式, 则 $A'A=B^2$; $B=\sqrt{A'A}$, 并且 $B$ 的特征值是正的. 这样, $B$ 是函数 $\sqrt{\lambda}$ 当 $\lambda=A'A$ 时的值(这里取根的主值). 因为矩阵 $A'A$ 的特征值是正的, 所以这个值有意义, 是唯一确定的, 且作为对称矩阵 $A'A$ 的多项式也是对称矩阵 (习题 1148, 1151). 置 $Q=AB^{-1}$, 如同上面一样可得 $Q$ 是正交阵.

表示法 $A=B_2Q_2$ 借助于矩阵 $AA'$ 可类似地得到. 论断$(b)$ 可以如同$(a)$一样地进行证明. 其中正定型用 Hermite 正定型替代. 论断$(c)$从在$(a)$ 和在$(b)$中指出的表示法的唯一性推出. 也可以证明如下: 在情形(1)和(2)分别把矩阵 $B$ 和 $A$ 用正交(酉)矩阵化到对角形 (参看习题 1595). 这时从论断(1)容易推出$(a)$和$(b)$中所指出的表示法的唯一性.

## 第四章 向量空间及其线性变换

**1277.** $(1, 2, 3)$. **1278.** $(1, 1, 1)$. **1279.** $(0, 2, 1, 2)$.

**1280.** $x_1=-27x_1'-71x_2'-41x_3'$; $x_2=9x_1'+20x_2'+9x_3'$; $x_3=4x_1'+12x_2'+8x_3'$.

**1281.** $x_1=2x_1'+x_3'-x_4'$; $x_2=-3x_1'+x_2'-2x_3'+x_4'$; $x_3=x_1'-2x_2'+2x_3'-x_4'$; $x_4=x_1'-x_2'+x_3'-x_4'$.

**1282.** $(a)\ a_0, a_1, \cdots, a_n$. $(b)\ f(\alpha), f'(\alpha), \dfrac{f''(\alpha)}{2!}, \cdots, \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$

**1283.**
$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \cdots & (-1)^n\alpha^n \\ 0 & 1 & -2\alpha & 3\alpha^2 & \cdots & (-1)^{n-1}n\alpha^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

这个矩阵的第$(k+1)$列的数是$(-a)^k$, $C_k^{k-1}(-a)^{k-1}$, $C_k^{k-2}(-a)^{k-2}$, …, $C_k^1(-a)$, 1, 0, 0, 0, …, 0.

1284. (a)两行交换位置; (b)两列交换位置; (c)矩阵关于它的中心作对称反射.

1285. 不是. 1286. 不是.

1287. 如果该直线通过坐标原点, 是; 否则, 不是.

1288. 是. 1289. 不是. 1290. 不是. 1291. 是.

1292. 不是. 1293. 是.

1294. 整个空间, 位于任一通过坐标原点的平面内的向量, 位于任一通过坐标原点的直线上的向量, 坐标原点自己亦即单独一个零向量.

1295. 不真.

1297. 例如, 向量$(1, 0, 0, \cdots, 1)$, $(0, 1, 0, \cdots, 0, 0)$, $(0, 0, 1, \cdots, 0, 0)$, …, $(0, 0, 0, \cdots, 1, 0)$组成基底. 维数等于$n-1$.

1298. 下列向量组成基底: 如果$k$是基底向量的号码, 则它的第$2k-1$个坐标等于1, 其余的坐标等于零, $k=1, 2, \cdots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$, 其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数. 维数等于$\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

1299. 前题答案中的基底向量加上如下一个向量组成基底, 这个向量偶数号码的坐标等于1, 而奇数号码的坐标等于零. 维数等于$1+\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

1300. 向量$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$和$(0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots)$组成基底. 维数等于2.

1301. 例如, 矩阵$E_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$组成基底, 其中$E_{ij}$是第$i$行和第$j$列交叉处那个元素等于1, 而所有其他元素等于零的矩阵. 维数等于$n^2$.

1302. 例如, 多项式: $1, x, x^2, \cdots, x^n$组成基底. 维数等于$n+1$.

1303. 例如, 矩阵$F_{ij}(i\leqslant j; i, j=1, 2, \cdots, n)$组成基底, 其中$F_{ij}$是元素$f_{ij}=f_{ji}=1$, 而其他元素等于零的矩阵. 维数等于$\frac{n(n+1)}{2}$.

1304. 例如, 矩阵$G_{ij}(i<j; i, j=1, 2, \cdots, n)$组成基底, 其中$G_{ij}$是元素$g_{ij}=1, g_{ji}=-1$, 而其他元素是零的矩阵. 维数等于$\frac{n(n-1)}{2}$.

1308. 例如, 向量$(1, 0, 0, \cdots, 0, -1)$, $(0, 1, 0, \cdots, 0, -1)$, …, $(0, 0, 0,$

$\cdots, 1, -1)$组成基底. 维数等于 $n-1$.

1310. 维数等于 3. 例如, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ 组成基底.

1311. 维数等于 3. 例如, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5$ 组成基底.

1312. 例如, $x_1-x_3-x_4=0, x_2+x_3-x_4=0$.

1313. 例如, $x_1-x_2-2x_3=0, x_1-x_2-2x_4=0, 2x_1+x_2-x_5=0$.

1317. $s=3, d=1$.

1318. $s=3, d=2$.

1319. **解.** 规则 (1) 容易证明. 我们来证明规则 (2). 因为数 $x_{i1}, \cdots, x_{ik}, y_{i1}, \cdots, y_{il}$ 满足等式(1), 所以 $\boldsymbol{c}_i=\sum_{j=1}^{l} y_{ij}\boldsymbol{b}_j=\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\boldsymbol{a}_j$. 因此向量 $\boldsymbol{c}_i$($i=1, 2, \cdots, d$)既属于 $L_1$ 也属于 $L_2$, 从而, 也属于它们的交 $D$. 令 $\boldsymbol{x}$ 是 $D$ 的任一向量. 它既可用 $L_1$ 的基底表示, 又可用 $L_2$ 的基底表示. 就是说, $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k=\beta_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\beta_l\boldsymbol{b}_l$. 这表明: 数行 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_l$ 是方程组(1)的解, 且因此可用基础解系(2)来线性表示. 令 $\gamma_1, \cdots, \gamma_d$ 是这种表示的系数. 此时 $\beta_j=\sum_{i=1}^{d}\gamma_i y_{ij}$ ($j=1, 2, \cdots, l$); 由此,

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{l}\beta_j\boldsymbol{b}_j=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{d}\gamma_i y_{ij}\right)\boldsymbol{b}_j=\sum_{i=1}^{d}\gamma_i\left(\sum_{j=1}^{l}y_{ij}\boldsymbol{b}_j\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{d}\gamma_i\boldsymbol{c}_i.$$

于是, 任一向量 $\boldsymbol{x}\in D$ 可用(4)的向量来线性表示. 最后, 组(4)是线性无关的, 因为这些向量在基底 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ 下的坐标的矩阵包含 $d$ 阶的非零的子式(3).

1320. 例如, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$ 组成并的基底. 交的基底由一个向量组成: $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2=(3, 5, 1)$.

1321. 例如, 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2$ 组成并的基底. 例如, $\boldsymbol{b}_1=-2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3=5\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$ 是交的基底.

1322. 例如, 并的基底由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1$ 组成. 交的基底例如由向量 $\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2=(1, 2, 2, 1)$, $\boldsymbol{c}_2=2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_3=(2, 2, 2, 2)$ 组成.

1328. 向量 $e_i$ 平行于 $L_2$ 在 $L_1$ 上的射影的第 $i$ 个坐标是 $\frac{n-1}{n}$，而其余的坐标是 $\frac{-1}{n}$；平行于 $L_1$ 在 $L_2$ 上的射影的所有坐标等于 $\frac{1}{n}$.

1329.

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

1334. **提示.** 考察直线的参数方程 $x=a_0+a_1t$，$x=b_0+b_1t$，其中 $a_0$, $a_1$, $b_0$, $b_1$ 是给定向量.

1335. 向量 $a_0-b_0$, $a_1$, $b_1$ 必须线性相关.

1336. 所求的条件是：向量 $a_1$ 和 $b_1$ 线性无关，而向量 $a_0-b_0$ 可用 $a_1$ 和 $b_1$ 线性表示. 如 $a_0-b_0=t_1a_1+t_2b_1$，则交点由向量 $a_0-t_1a_1=b_0+t_2b_1$ 给出.

1337. $(-2, -5, -1, 1, -1)$.

1338. $(0, 1, -1, -2, -3)$.

1339. 充分必要条件是：向量 $a_0-c$, $b_0-c$, $a_1$, $b_1$ 线性相关，而 $a_0-c$, $a_1$, $b_1$ 线性无关，$b_0-c$, $a_1$, $b_1$ 也线性无关. 所求直线有方程 $x=c+dt$，其中 $d=\lambda_1(a_0-c)+\lambda_2a_1=\lambda_3(b_0-c)+\lambda_4b_1$，且系数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_3$ 不为零. 这直线和给定两直线的交点的形式是：

$$a_0+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}a_1=c+\frac{1}{\lambda_1}d \quad 和 \quad b_0+\frac{\lambda_4}{\lambda_3}b_1=c+\frac{1}{\lambda_3}d.$$

1340. $x=c+dt$，其中 $d=(6, 7, -8, -11)$；$M_1(2, 2, -3, -4)$，$M_2(-4, -5, 5, 7)$.

1341. $x=c+dt$，其中 $d=(1, 1, 0, 3)$；$M_1(2, 3, 2, 1)$，$M_2(1, 2, 2, -2)$.

1344. 如果三维空间的两个平面有公共点，则它们有公共直线. 如果四维空间的平面和三维线性流形有公共点，则它们有公共直线. 如果四维空间的两个三维线性流形有公共点，则它们有公共平面.

1345. 为了便于各种情形的分类，我们引进两个矩阵：$A$ 是以向量 $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ 的坐标为列所得到的矩阵，$B$ 是由 $A$ 添上向量 $a_0-b_0$ 的坐标列所得

到的矩阵．令$A$的秩是$r_1$，$B$的秩是$r_2$．下列六种情形之一是可能的:

(1) $r_1=4$，$r_2=5$．两平面不位于一个四维流形之内（两平面绝对相错）.

(2) $r_1=r_2=4$．两平面有一个公共点，因此，位于一个四维的但不位于一个三维的流形内（两平面绝对相交）.

(3) $r_1=3$，$r_2=4$．两平面没有公共点，它们位于一个四维的但不位于一个三维的流形内（两平面平行于一直线而相错，即它们两平行于方程为$\boldsymbol{a}_1t_1+\boldsymbol{a}_2t_2=\boldsymbol{b}_1t_3+\boldsymbol{b}_2t_4$的直线）.

(4) $r_1=r_2=3$．两平面位于三维空间内且沿一直线相交.

(5) $r_1=2, r_2=3$．两平面没有公共点，但位于一个三维空间内（两平面平行）.

(6) $r_1=r_2=2$．两平面重合．$r_2\geqslant r_1\geqslant 2$，因为两对向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$和$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$线性无关.

1347. **提示**．用关于数$k$的归纳法进行证明.

1348. 顶点在下列各点的八面体:

$(1,1,-1,-1)$，$(1,-1,1,-1)$，$(1,-1,-1,1)$，

$(-1,-1,1,1)$，$(-1,1,-1,1)$，$(-1,1,1,-1)$.

**提示**．在确定顶点的坐标时考虑到：所求截体的顶点应当是截断子空间与立方体棱的交点，且沿着立方体的每条棱三个坐标等于$\pm1$，而第四个坐标由$+1$变到$-1$.

1349. 顶点在下列各点的四面形：$\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$，$\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$，$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$，$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$．**提示**．求顶点的射影.

1350. **提示**．取对角线的该端点为坐标原点，由它引出的各棱为坐标轴，并证明：所考察的各平行线性流形为方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k \quad (k=0, 1, 2, \cdots, n)$$

所决定，而对角线与这些流形中的第$k$个的交点的坐标全都等于同一的数$\frac{k}{n}(k=0,1,2,\cdots,n)$.

1352. 双线性型$g$应当是对称的，亦即$a_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，而且与它相对应的二次型

$$f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

应是正定的；$(e_i, e_j)=a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$.

1357. 应当添加向量(2, 2, 1, 0), (5, −2, −6, −1).

1358. 应当添加向量(1, −2, 1, 0), (25, 4, −17, −6).

1359. 向量$\pm\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$之一.

1360. 例如：$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1361. (1, 2, 2, −1), (2, 3, −3, 2), (2, −1, −1, −2).

1362. (1, 1, −1, −2), (2, 5, 1, 3).

1363. (2, 1, 3, −1), (3, 2, −3, −1), (1, 5, 1, 10).

1366. 例如：$b_1=(2, -2, -1, 0)$, $b_2=(1, 1, 0, -1)$.

1367. 例如：$6x_1-9x_2-x_3=0$, $x_2-x_4=0$.

1369. 令 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 $L$ 的基底. 我们寻求以下形式的 $y$：

$$y=\sum_{j=1}^{k} c_j a_j.$$

用$a_i$纯量地乘这一等式并注意$(a_i, y)=(a_i, x)$, 我们得到方程组

$$\sum_{j=1}^{k}(a_i, a_j)c_j=(a_i, x) \quad (i=1, 2, \cdots, k),$$

它关于 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 应当有唯一解. 求出 $y$ 后, 我们置 $z=x-y$.

1370. $y=3a_1-2a_2=(1, -1, -1, 5)$; $z=(3, 0, -2, -1)$.

1371. $y=2a_1-a_2=(3, 1, -1, -2)$; $z=(2, 1, -1, 4)$.

1372. $y=(5, -5, -2, -1)$; $z=(2, 1, 1, 3)$.

1373. **提示**. 导出关系式

$$|x-u|^2=|(x-x_0)-y|^2+|y-(u-x_0)|^2,$$

其中 $y$ 是 $x-x_0$ 在 $L$ 上的正交射影.

1374. (a) 5. (b) 2.

1375*. **提示**. 置 $x-x_0=y+z$, 其中 $y\in L$, $z\in L^*$. 由习题 1373, $d^2=(z, z)$, 令 $y=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ka_k$. 从行列式 $G(a_1, a_2, \cdots, a_k, x-x_0)$ 的最后一列减去所有前面各列的(分别地) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 倍, 并证明：在位置$(a_i, x-x_0)$处的结果是零, 在位置$(x-x_0, x-x_0)$处的结果是$(x-x_0, z)=(z, z)$.

1376. **提示.** 令 $u_1 \in P_1$, $u_2 \in P_2$, $y$ 是 $x_1 - x_2$ 在 $L$ 上的正交射影. 导出等式

$$|u_1 - u_2|^2 = |(x_1 - x_2) - y|^2 + |y + (u_1 - x_1) - (u_2 - x_2)|^2.$$

1377. 3.

1378. **解.** 我们取第一个面的顶点之一作为坐标原点. 令第一个面的另外一些顶点为向量 $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_k$ 所给出, 而第二个面的各顶点为向量 $x_{k+1}, \cdots, x_n$ 所给出. 我们求由这两个面的顶点所决定的两个线性流形(习题1346)间的距离. 这两个流形是

$$x_1 t_1 + \cdots + x_k t_k \text{ 和 } (x_{k+1} - x_n) t_{k+1} + \cdots + (x_{n-1} - x_n) t_{n-1} + x_n.$$

所求的距离等于向量 $x_n$ 关于子空间 $L$ 的正交分量 $z$ 的长度, 其中 $L$ 是由向量 $x_1, \cdots, x_k, x_{k+1} - x_n, \cdots, x_{n-1} - x_n$ 所张成的. 用向量 $x_1, \cdots, x_k, x_{k+1} - x_n, \cdots, x_{n-1} - x_n$ 乘等式

$$x_n = x_1 t_1 + \cdots + x_k t_k + (x_{k+1} - x_n) t_{k+1} + \cdots + (x_{n-1} - x_n) t_{n-1} + z,$$

我们得到下列方程:

$$t_1 + \frac{1}{2} t_2 + \cdots + \frac{1}{2} t_k = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} t_1 + t_2 + \cdots + \frac{1}{2} t_k = \frac{1}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{2} t_2 + \cdots + t_k = \frac{1}{2};$$

$$t_{k+1} + \frac{1}{2} t_{k+2} + \cdots + \frac{1}{2} t_{n-1} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} t_{k+1} + t_{k+2} + \cdots + \frac{1}{2} t_{n-1} = -\frac{1}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2} t_{k+1} + \frac{1}{2} t_{k+2} + \cdots + t_{n-1} = -\frac{1}{2}.$$

由此将前 $k$ 个方程相加以及将后 $n-k-1$ 个方程相加, 容易求得:

$$t_1 = \cdots = t_k = \frac{1}{k+1}; \quad t_{k+1} = \cdots = t_{n-1} = \frac{-1}{n-k}.$$

所以,

$$z = \frac{x_{k+1} + \cdots + x_n}{n-k} - \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k+1}.$$

由此看出：$z$ 连接着该两个面的中心．因为用该两个面的顶点所决定的流形之间的距离，按已证明了的，等于两个面的中心间的距离，所以后者就是这两个面之间的距离，将 $z$ 的表达式平方然后开方，我们求得：

$$|z|=\sqrt{\frac{n+1}{2(n-k)(k+1)}}.$$

1379．**提示**．从条件 $(x-\alpha e,\ e)=0$ 求 $\alpha$．当证明唯一性时，用 $e$ 纯量地乘等式 $\alpha_1 e+z_1=\alpha_2 e+z_2$ 的两边．

1380．**提示**．考察向量 $y=x-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i e_i$ 的纯量平方，其中 $\alpha_i=(x, e_i)$，并应用前题的性质$(c)$和$(d)$．

1381．**提示**．第一个方法：把纯量平方$(x+ty,\ x+ty)$作为 $t$ 的非负二次三项式来考虑．第二个方法：当 $y\neq 0$ 时，把 $x$ 表为形式 $x=\alpha y+z$，其中$(y, z)=0$，证明：$(x, x)\geqslant\alpha^2(y, y)$，并且等号成立当且仅当 $x=\alpha y$ 时，进而证明

$$(x, y)^2=\alpha^2(y, y)(y, y)\leqslant(x, x)(y, y).$$

第三个方法：应用习题503的不等式于向量 $x$ 和 $y$ 在标准正交基底下的坐标．

1382．**提示**．第一个方法：把纯量平方$(x+ty, x+ty)$（其中 $t=s(x, y)$）考虑为 $s$ 的非负二次三项式（$s$ 是实数）．第二个方法：当 $y\neq 0$ 时，置 $x=\alpha y+z$，其中 $\alpha$ 是复数且$(y, z)=0$；证明：$(x, x)\geqslant\alpha\bar{\alpha}(y, y)$，并且等号成立当且仅当 $x=\alpha y$．进而证明：

$$(x, y)(y, x)=\alpha\bar{\alpha}(y, y)(y, y)\leqslant(x, x)(y, y).$$

第三个方法：把习题505的不等式应用于向量 $x$ 和 $y$ 在标准正交基底下的坐标．

1384．$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2dx\cdot\int_a^b[g(x)]^2dx.$

1385．$AB=BC=AC=6$；$\angle A=\angle B=\angle C=60°$．

1386．$AB=5$；$BC=10$；$AC=5\sqrt{3}$；$\angle A=90°$；$\angle B=60°$；$\angle C=30°$．

1389．**提示**．如果棱用向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 给出，则考察表达式 $|a_1-a_2+\cdots+a_n|^2$．

1390．**提示**．考察表达式 $|x+y|^2+|x-y|^2$．

1393. 对于奇数 $n$, 没有正交的对角线; 对于 $n=2k$, 所求的数等于 $\frac{1}{2}C_n^k=C_{2k-1}^{k-1}$.

1394. $a\cdot\sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}a\sqrt{n}=\infty$.

1395. $\varphi_n=\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\frac{\pi}{2}$. $\varphi_4=60°$.

1396. $R=\frac{a\sqrt{n}}{2}$. 当 $n=1,2,3$ 时, $R<a$; 当 $n=4$ 时, $R=a$; 当 $n>4$ 时, $R>a$.

1398. **提示.** 证明:可以用棱的链(一串棱)把对角线的起点同任何另一个顶点连接起来,并利用前题.

1399. **提示.** 利用习题 1379.

1400. **解.**

$$\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}=\frac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}=\frac{|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|},$$

$$\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}')=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}')}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}'|}=\frac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}'|}=\frac{|\boldsymbol{y}|\cdot|\boldsymbol{y}'|}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}'|}\cos(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')$$
$$\leqslant\frac{|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}=\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

等号成立当且仅当 $\cos(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')=1$, 亦即按习题 1399, 对 $a>0$ 当 $\boldsymbol{y}'=a\boldsymbol{y}$ 时.

1401. $\arccos\sqrt{\frac{k}{n}}$.

1402. $60°$.

1403. $30°$.

1405. $\arccos\frac{2}{3}$. **提示.** 令 $\boldsymbol{a}_i$ 是从 $A_0$ 到 $A_i\,(i=1,2,3,4)$ 的向量. 考察两个向量 $\boldsymbol{a}_1t_1+\boldsymbol{a}_2t_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3t_3+\boldsymbol{a}_4t_4$; 证明: 它们之间夹角的余弦平方等于

$$\frac{(t_1+t_2)^2(t_3+t_4)^2}{4(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)(t_3^2+t_3t_4+t_4^2)},$$

并求函数 $(t_1+t_2)^2$ 在条件 $t_1^2+t_1t_2+t_2^2=1$ 之下的极大值.

1406. $45°$. **提示.** 求第二个平面的向量与其在第一个平面上的正交射影二者之间的角的最小值.

1407. **提示.** 证明: $\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_k$ 和 $\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_k$ 的每一组是由向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 所张成的子空间 $\boldsymbol{L}_k$ 的基底; 对 $i\neq j$, $(\boldsymbol{f}_i,\boldsymbol{g}_j)=0$; 在等式 $\boldsymbol{g}_k=c_1\boldsymbol{f}_1+\cdots+$

$c_k f_k$ 中所有系数 $c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}$ 等于零.

1408. **提示.** 置 $(x^2-1)^k=u_k(x)$. 验证: $u_k^{(j)}(\pm1)=0$ 当 $j<k$; 分部积分 $\int_{-1}^{+1}u_k^{(k)}(x)x^j dx$ 若干次, 一直到积分号下 $x^s$ 形式的因子消失. 证明: 这个积分当 $j=0,1,\cdots,k-1$ 时等于零, 由此导出所要求的等式:

$$\int_{-1}^{+1}P_j(x)P_k(x)dx=0,\quad 当\ j\neq k.$$

1409. $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$,

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

$$P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j\frac{(2j)!}{(2j-k)!}x^{2j-k}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2j-1)}{(k-j)!(2j-k)!2^{k-j}}x^{2j-k},$$

在这些表达式中删去具有 $x$ 的负指数的所有项.

1410. $\sqrt{\frac{2}{2k+1}}$. **解.** 我们置 $(x^2-1)^k=u_k(x)$ 并计算纯量平方 $(P_k, P_k)$. 分部积分, 我们求得:

$$\int_{-1}^{+1}u_k^{(k)}(x)\cdot u_k^{(k)}(x)dx=-\int_{-1}^{+1}u_k^{(k-1)}(x)u_k^{(k+1)}(x)dx=\cdots$$

$$=(-1)^k\int_{-1}^{+1}u_k(x)u_k^{(2k)}(x)dx$$

$$=(2k)!\int_{-1}^{+1}(1-x)^k(1+x)^k dx.$$

再分部积分, 我们求得:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^k(1+x)^k dx=\frac{k}{k+1}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{k-1}(1+x)^{k+1}dx=\cdots$$

$$=\frac{k!}{(k+1)(k+2)\cdots(2k)}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{2k}dx$$

$$=\frac{(k!)^2 2^{2k+1}}{(2k)!(2k+1)},$$

由此,

$$(P_k, P_k)=\frac{1}{2^{2k}(k!)^2}(2k)!\frac{(k!)^2 2^{2k+1}}{(2k)!(2k+1)}=\frac{2}{2k+1}.$$

1411. $P_k(1)=1$. **提示**. 把微分乘积的 Leibniz 法则应用于表达式

$$P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}[(x+1)^k(x-1)^k].$$

1412. $P_k(x)=C_k f_k(x)$, 其中

$$C_k=\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}=\frac{C_{2k}^k}{2^k}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2k-1}{k!}$$

是多项式 $P_k(x)(k=0, 1, \cdots, n)$的首项系数. **提示**. 利用习题 1407, 1408, 1409.

1414. **提示**. 置 $x^n=[x^n-f(x)]+f(x)$, 证明: 当且仅当 $f(x)$是 $x^n$ 关于次数 $\leqslant n-1$ 的多项式子空间的正交分量时极小值被达到(习题 1373), 并应用习题 1410, 1412 和 1413.

1415. $g(a_1, a_2)$等于在向量 $a_1$、$a_2$ 上所构造的平行四边形面积的平方. $g(a_1, a_2, a_3)$等于在向量 $a_1$、$a_2$, $a_3$ 上所构造的平行六面体体积的平方.

1416. **提示**. 考察具有行列式 $g(a_1, a_2, \cdots, a_k)$的齐次线性方程组.

1417. **提示**. 从关系式

$$f_j=\sum_{k=1}^{n}c_{jk}e_k \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

求对偶基.

1418. (*a*) $T=(S')^{-1}$; (*b*) $T=(\bar{S}')^{-1}$, 此处撇号表示转置, 而横线表示用复共轭元素代换原元素.

1419. **提示**. 第一个方法. 证明: Gram 行列式 $g(a_1, \cdots, a_k)$等于由向量 $a_1, \cdots, a_k$ 在包含这些向量的 $k$ 维子空间的任何标准正交基底下的坐标所组成的行列式的模的平方.

第二个方法. 证明: 关于 $x_1$, $\cdots$, $x_k$ 的非负二次型 $(a_1x_1+\cdots+a_kx_k, a_1x_1+\cdots+a_kx_k)$当且仅当向量 $a_1, \cdots, a_k$ 线性无关时是正定的.

第三个方法. 利用 Gram 行列式在向量正交化过程中的不变性 (习题 1415), 证明: 如果向量 $b_1$, $\cdots$, $b_k$ 是从 $a_1$, $\cdots$, $a_k$ 正交化后所得到, 则 $g(a_1, \cdots, a_k)=|b_1|^2\cdots|b_k|^2$, 并应用习题 1413.

1421. $\frac{1}{C_{2n}^n\sqrt{2n+1}}$. **提示**. 第一个方法. 注意到: 所求距离等于向量 $-x^n$ 关于次数不高于 $n-1$ 的多项式子空间的正交分量之长, 应用前题和习题 418.

第二个(不利用习题 418)方法. 所求距离给出积分 $\int_{0}^{1}[f(x)]^2dx$ 的极小值, 其中 $f(x)$ 是首项系数等于 1 的 $n$ 次多项式. 这使得可以用改变积分限的方法把问题归结到 Legendre 多项式的相应的极值性质(习题 1414).

1422. **提示**. 应用习题 1413 和 1415.

1423. $|D|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$. 并且等号成立当且仅当或者

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{a}_{jk}=0\ (i\neq j;\ \ i,j=1,2,\cdots,n),$$

或者行列式 $D$ 包含零的行.

1424. **提示**. 在向量空间 $\boldsymbol{R}_n$ 中引入纯量积

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j,$$

其中 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $y_1,\cdots,y_n$ 分别是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 在空间 $\boldsymbol{R}_n$ 的某基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标, 证明: $D_f=g(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$, 并应用习题 1422.

1425. 利用习题 1210(*d*).

1426. **提示**. 应用 Hermite 型的类似于实型在习题 1210 中所指出的性质(例如, 参看 Ф. Р. Гантмахер«Теория матриц»第十章 § 9. 1953)(有柯召的中译本《矩阵论》——译者注).

1427. **提示**. 利用习题 1419 答案中第一和第二个方法中的论据.

1428. **提示**. 应用习题 1422.

1429. **解**. 令正交化过程把向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\ \boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 变为向量 $\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_k,\boldsymbol{d}_1,\cdots,\boldsymbol{d}_l$, 而把向量 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 变为向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_l$. 向量 $\boldsymbol{e}_i$ 关于由 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{i-1}$ 张成的子空间 $\boldsymbol{L}_i$ 的正交分量与 $\boldsymbol{d}_i$ 重合. 事实上, $\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{y}_i+\boldsymbol{e}_i$, 其中 $\boldsymbol{y}_i$ 可用 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{i-1}$ 线性表示, 而 $\boldsymbol{e}_i$ 正交于这些向量. $\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{y}_i'+\boldsymbol{z}$, 其 $\boldsymbol{y}_i'\in\boldsymbol{L}_i$, 而 $\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{L}_i$ 正交, 但此时 $\boldsymbol{b}_i=(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}_i')+\boldsymbol{z}$, 其中 $\boldsymbol{y}_i+\boldsymbol{y}_i'\in\boldsymbol{L}_i$, 而 $\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{L}_i$ 正交. 从而, 按习题 1413, $\boldsymbol{z}_i=\boldsymbol{d}_i$ 以及 $|\boldsymbol{d}_i|\leqslant|\boldsymbol{e}_i|$, 并且等号在条件(2)下一定成立, 因为 $\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{y}_i$ 用 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_i$ 表出, 这意味着, 正交于 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k;\ \boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{i-1}$. 按习题 1415, 我们有:

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_l)&=(|\boldsymbol{c}_1|^2\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{c}_k|^2)\cdot(|\boldsymbol{d}_1|^2\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{d}_l|^2)\\&\leqslant(|\boldsymbol{c}_1|^2\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{c}_k|^2)\cdot(|\boldsymbol{e}_1|^2\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{e}_l|^2)\\&=g(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k)g(\boldsymbol{b}_1,\cdots\boldsymbol{b}_l),\end{aligned}$$

不等式(1)得证. 在条件(2)下, $|d_i|=|e_i|$ ($i=1,2,\cdots,l$) 且不等式(1)变成等式. 如果 $a_1,\cdots,a_k$ 或者 $b_1,\cdots,b_l$ 是线性相关的, 则不等式(1)右端变为零, 而因为左端非负, 所以我们也得到等式.

反之, 令不等式(1)变为等式. 此时按前面所证, 有

$$|c_1|^2\cdots|c_k|^2\cdot|d_1|^2\cdots|d_l|^2=|c_1|^2\cdots|c_k|^2\cdot|e_1|^2\cdots|e_l|^2.$$

由此或者存在如此的 $i\leqslant k$, 使 $|c_i|=0$, 亦即 $a_1,\cdots,a_k$ 线性相关, 或者存在如此的 $i\leqslant l$, 使 $|d_i|=|e_i|=0$, 亦即 $b_1,b_2,\cdots,b_l$ 线性相关, 或者 $|d_i|=|e_i|$ ($i=1,2,\cdots,l$). 由此推出: 所有的 $e_i$, 而这也意味着所有的 $b_i$(作为前者的线性组合)正交于 $a_1,\cdots,a_k$, 亦即条件(2)成立.

1430. **提示.** 应用前题.

1431. 应用习题 1425 和 1429.

1432. 应用习题 1426 和 1429.

1433. **解.** (a) 令组(1)的数是 $n$ 维单纯形顶点 $M_0$、$M_1$、$\cdots$、$M_n$ 所有可能的对的距离, 并且

$$a_{ij}=\overline{M_iM_j}\quad (i,j=0,1,2,\cdots,n;\ i>j). \tag{2}$$

我们用 $e_i$ 表示由 $M_0$ 到 $M_i$ ($i=1,2,\cdots,n$) 的向量, 此时我们有:

$$a_{i0}^2=(e_i,e_i)\quad (i=1,2,\cdots,n); \tag{3}$$

$$a_{ij}^2=(e_i-e_j,e_i-e_j)\quad (i,j=1,2,\cdots,n;\ i>j).$$

从这些等式我们求出向量 $e_1,\cdots,e_n$ 的纯量积:

$$(e_i,e_i)=a_{i0}^2\quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{4}$$

$$(e_i,e_j)=\frac{a_{i0}^2+a_{j0}^2-a_{ij}^2}{2}\quad (i,j=1,2,\cdots,n;\ i>j).$$

应用这些关系式, 我们写出向量 $e_1,\cdots,e_n$ 的 Gram 矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{10}^2 & \dfrac{a_{20}^2+a_{10}^2-a_{21}^2}{2} & \cdots & \dfrac{a_{n0}^2+a_{10}^2-a_{n1}^2}{2} \\ \dfrac{a_{20}^2+a_{10}^2-a_{21}^2}{2} & a_{20}^2 & \cdots & \dfrac{a_{n0}^2+a_{20}^2-a_{n2}^2}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{a_{n0}^2+a_{10}^2-a_{n1}^2}{2} & \dfrac{a_{n0}^2+a_{20}^2-a_{n2}^2}{2} & \cdots & a_{n0}^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

因为点 $M_0,M_1,\cdots,M_n$ 不位于一个 $n-1$ 维流形内, 所以向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关. 用 $D_k$ 表示矩阵(5)的 $k$ 阶角子式, 并应用习题 1410, 我们得到

$$D_k>0\quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

于是，条件(6)是使组(1)的数是 $n$ 维单纯形顶点对距离的必要条件．我们来证明：这些条件也是充分的．当条件(6)成立时，矩阵(5)是线性无关向量组 $e_1$、…、$e_n$ 的 Gram 矩阵(参看习题 1352 或者 1210(c))．因此等式(4)是正确的，由此推出等式(3)．取坐标原点作为 $M_0$，取向量 $e_i$ 的终点作为 $M_i(i=1, 2, \cdots, n)$，得出等式(2)成立，即所要证明的．

在情形(b)，矩阵(5)所有主子式(而不仅是角子式)的非负性是必要且充分条件．必要性象在情形(a)一样地证明，所不同的是向量 $e_1$、…、$e_n$ 可以线性相关．充分性借助习题 1425 或者 1210(d)证明．

1434. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

1435. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，如果 $e_1$ 变为 $e_2$；

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，如果 $e_2$ 变为 $e_1$.

1436. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1437. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1438. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1439. 变换矩阵主对角线的前 $k$ 个元素等于 1，而所有其余元素等于零．

1440. 变换矩阵的第 $i$ 列是向量 $b_i$ 在基底 $a_1$, …, $a_n$ 下的坐标．

1441. $\varphi$ 是线性的．$A_\varphi$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1442. $\varphi$ 不是线性的.

1443. 不是线性的.

1444. $\varphi$ 是线性的. $A_\varphi=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1445. $\begin{pmatrix}2 & -11 & 6\\ 1 & -7 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

1446. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6 & 11 & 5\\ -12 & 13 & 10\\ 6 & -5 & -5\end{pmatrix}$.

1448. 在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 下矩阵是

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix};$$

在基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 下矩阵是

$$\begin{pmatrix}\frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 5\\ -\frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -4\\ 8 & -2 & 6\end{pmatrix}.$$

1449. (a) 当左乘时

$$\begin{pmatrix}a & b & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & c & d\end{pmatrix};$$

(b) 当右乘时

$$\begin{pmatrix}a & 0 & c & 0\\ 0 & a & 0 & c\\ b & 0 & d & 0\\ 0 & b & 0 & d\end{pmatrix}.$$

1450. (a) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$.

1451. 在矩阵 $A$ 中第 $i$ 行和第 $j$ 行交换且第 $i$ 列和第 $j$ 列交换.

1452. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1453. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1454. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

1457. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29\frac{1}{2} & -25 \end{pmatrix}$.

1458. $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

1461. $n^2$.

1464. **提示.** 应用前题和矩阵函数的定义(习题 1148).

1465. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$. 特征向量是形如 $c(1, 1, -1)$的向量, 其中 $c\neq0$.

1466. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$. 特征向量的形式为 $c_1(1,2,0)+c_2(0, 0, 1)$, 其中 $c_1$ 和 $c_2$ 不同时等于零.

1467. $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=0$. 属于特征值 1 的特征向量形式为 $c(1,1, 1)$, 属于 $\lambda=0$ 的特征向量形式为 $c(1,2,3)$, 其中 $c\neq0$.

1468. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. 特征向量的形式为 $c(3, 1, 1)$, 其中 $c\neq0$.

1469. $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$. 属于 $\lambda=3$ 的特征向量的形式为 $c(1, 2, 2)$, 而属于 $\lambda=-1$ 的特征向量的形式为 $c(1,2,1)$, 其中 $c\neq0$.

1470. $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. 属于 $\lambda=1$ 的特征向量的形式为$c_1(2,1,0)+c_2(1,0,-1)$, 而属于 $\lambda=-1$ 的特征向量的形式为 $c(3,5,6)$, 其中 $c_1$ 和 $c_2$ 不同时为零, 且 $c\neq0$.

1471. $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2+3i$, $\lambda_3=2-3i$. 属于 $\lambda=1$ 的特征向量的形式为 $c(1,2,1)$, 属于 $\lambda=2+3i$ 的特征向量的形式为 $c(3-3i, 5-3i, 4)$. 属于 $\lambda=2-3i$ 的特征向量则为 $c(3+3i, 5+3i, 4)$.

1472. $\lambda_1=\lambda_2=1$; $\lambda_3=\lambda_4=0$. 属于 $\lambda=1$ 的特征向量的形式为 $c(0,$

0, 0, 1), 而属于 $\lambda=0$ 的特征向量的形式为 $c_1(0,1,0,0)+c_2(0,0,1,0)$, 其中 $c\neq 0$, 又 $c_1$ 和 $c_2$ 不同时为零.

1473. $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=\lambda_4=0$. 属于 $\lambda=1$ 的特征向量的形式为 $c_1(1,0,1,0)+c_2(0,0,0,1)$, 而属于 $\lambda=0$ 的特征向量的形式为 $c_1(0,1,0,0)+c_2(0,0,1,0)$, 其中数 $c_1$ 和 $c_2$ 不同时为零.

1474. $\lambda=2$. 特征向量的形式为 $c_1(1,1,-1,0)+c_2(1,1,0,1)$, 其中 $c_1$ 和 $c_2$ 不同时为零.

1477. **提示.** 应用习题 820 和 1476.

1479. $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(1,1,0)$, $a_3=(1,0,-3)$; $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

1480. 矩阵不能化到对角形.

1481. $a_1=(1,1,0,0)$, $a_2=(1,0,1,0)$, $a_3=(1,0,0,1)$, $a_4=(1,-1,-1,-1)$; $\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$.

1482. 矩阵不能化到对角形.

1483. $a_1=(1,0,0,1)$, $a_2=(0,1,1,0)$, $a_3=(0,-1,1,0)$, $a_4=(-1,0,0,1)$; $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

1484. 例如:

$$T=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\0&1&\cdots&-1&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1&\cdots&1&0\\1&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},$$

其中沿次对角线的元素在主对角线上方的等于 $-1$, 下方的等于 $+1$; 对奇数 $n$, 在对角线交点处的元素可以是 $+1$, 也可以是 $-1$. 对角形矩阵 $B$, 在主对角线上当 $n$ 是偶数时从上往下有 $\frac{n}{2}$ 个元素等于 $+1$, 当 $n$ 是奇数时则有 $\frac{n+1}{2}$ 个等于 $+1$, 而其余元素等于 $-1$.

**提示.** 考察 $n$ 维空间之在某基底下有矩阵 $A$ 的线性变换 $\varphi$, 求由这个变

换的特征向量所组成的基底，并应用习题 1477.

1486. 与次对角线两端等距离的两个元素 $\alpha_k$ 和 $\alpha_{n-k+1}$ 必须或者同时都异于零，或者都是零.

**提示.** 考察 $n$ 维空间在某基底下对应于矩阵 $A$ 的线性变换 $\varphi$，并应用习题 1117, 1132, 1484.

1487. 唯一的特征值是 $\lambda=0$；特征向量是零次多项式.

1491. **解.** 首先证明等式

$$\dim \boldsymbol{L}=\dim \varphi \boldsymbol{L}+\dim \boldsymbol{L}_0, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{L}_0$ 是 $\boldsymbol{L}$ 和变换 $\varphi$ 的核 $\varphi^{-1}\mathbf{0}$ 的交. 为此，首先(用向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_l$) 补充子空间 $\boldsymbol{L}_0$ 的基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 以形成 $\boldsymbol{L}$ 的一个基底(当 $\boldsymbol{L}_0=\mathbf{0}$ 时，没有向量 $\boldsymbol{a}_i$，当 $\boldsymbol{L}_0=\boldsymbol{L}$ 时，没有向量 $\boldsymbol{b}_i$). 向量 $\varphi\boldsymbol{b}_1, \varphi\boldsymbol{b}_2, \cdots, \varphi\boldsymbol{b}_l$ 形成 $\varphi\boldsymbol{L}$ 的一个基底. 事实上，如果 $\boldsymbol{y}\in\varphi\boldsymbol{L}$，则 $\boldsymbol{y}=\varphi\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}$. 如果 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i\boldsymbol{b}_i$，则 $\boldsymbol{y}=\varphi\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{l}\beta_i\varphi\boldsymbol{b}_i$，(因为 $\varphi\boldsymbol{a}_i=0$，$i=1,2,\cdots,k$). 向量 $\varphi\boldsymbol{b}_1, \varphi\boldsymbol{b}_2, \cdots, \varphi\boldsymbol{b}_l$ 是线性无关的：因为 $\sum_{i=1}^{l}\beta_i\varphi\boldsymbol{b}_i=\mathbf{0}$ 蕴涵着 $\sum_{i=1}^{l}\beta_i\boldsymbol{b}_i\in\boldsymbol{L}_0$. 所以，$\sum_{i=1}^{l}\beta_i\boldsymbol{b}_i=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{a}_i$. 由此，$\beta_i=0\,(i=1,2,\cdots,l)$.

于是，$\dim\boldsymbol{L}=l+k=\dim\varphi\boldsymbol{L}+\dim\boldsymbol{L}_0$.

(*a*) 由于 $\boldsymbol{L}_0\subset\varphi^{-1}\mathbf{0}$，从(1)我们得

$$\dim\boldsymbol{L}=\dim\varphi\boldsymbol{L}+\dim\boldsymbol{L}_0\leqslant\dim\varphi\boldsymbol{L}+\text{nullity}\varphi;$$

$$\dim\boldsymbol{L}-\text{nullity}\varphi\leqslant\dim\varphi\boldsymbol{L}.$$

再者，
$$\dim\varphi\boldsymbol{L}=\dim\boldsymbol{L}-\dim\boldsymbol{L}_0\leqslant\dim\boldsymbol{L}.$$

(*b*) 令 $\varphi^{-1}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'$. 因为 $\mathbf{0}\in\boldsymbol{L}$，所以 $\varphi^{-1}\mathbf{0}\subset\varphi^{-1}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'$，以及 $\boldsymbol{L}'\cap\varphi^{-1}\mathbf{0}=\varphi^{-1}\mathbf{0}$. 应用(1)，在其中以 $\boldsymbol{L}'$ 代替 $\boldsymbol{L}$，我们得到

$$\dim\boldsymbol{L}'=\dim\varphi\boldsymbol{L}'+\text{nullity}\varphi. \tag{2}$$

因为 $\varphi\boldsymbol{L}'\subset\boldsymbol{L}$，推出 $\dim\varphi\boldsymbol{L}'\leqslant\dim\boldsymbol{L}$，由(2)，

$$\dim\boldsymbol{L}'\leqslant\dim\boldsymbol{L}+\text{nullity}\varphi,$$

这就证明了(*b*)中的第二个不等式.

现在我们来证明 $\varphi\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{L}\cap\varphi\boldsymbol{R}_n$.

因为 $\varphi L'\subset L$ 以及 $\varphi L'\subset\varphi R_n$，所以，$\varphi L'\subset L\cap\varphi R_n$. 如果 $x\in L\cap\varphi R_n$，则 $x=\varphi x'$，其中 $x'\in\varphi^{-1}L=L'$，也就是说 $x\in\varphi L'$，故 $L\cap\varphi R_n\subset\varphi L'$.

因为 $\dim(L+\varphi R_n)\leqslant n$. 应用子空间和的维数与交的维数之间的关系（习题 1316），我们有

$$\dim\varphi L'=\dim(L\cap\varphi R_n)=\dim L+\dim\varphi R_n-\dim(L+\varphi R_n)$$
$$\geqslant\dim L+\dim\varphi R_n-n=\dim L-\operatorname{nullity}\varphi.$$

由此. 按(2)，我们得

$$\dim L'=\dim\varphi L'+\operatorname{nullity}\varphi\geqslant(\dim L-\operatorname{nullity}\varphi)+\operatorname{nullity}\varphi$$
$$=\dim L,$$

这就完成了(b)中第一个不等式的证明.

1492. **提示**. 考察空间 $R_n$ 之具有矩阵 $A$ 和 $B$ 的变换 $\varphi$ 和 $\psi$，并把前题应用于子空间 $L=\psi R_n$.

1494. 唯一的特征值是 $\lambda=1$. 特征向量的形式为 $c_1(a_1+2a_2)+c_2(a_2+a_3+2a_4)$，其中 $c_1$、$c_2$ 不同时等于零.

1495. **提示**. 考察变换 $\varphi$ 在下一基底中的矩阵：这基底的开头一些向量是 $\varphi$ 属于 $\lambda_0$ 的线性无关的特征向量. 另外的方法是应用习题 1074.

1501. 零空间和由所有次数 $\leqslant k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 的多项式组成的子空间 $L_k$.

1503. 不变子空间如下：零空间，以及由基底向量 $a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_n$ 的任何子组所张成的子空间；它们的数目等于 $2^n$.

**提示**. 应用习题 1495, 1502, 证明：任何非零不变子空间 $L$ 有是向量 $a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_n$ 的子组的基底.

1504. 具有基底向量 $a_1=(2,2,-1)$ 的直线，具有基底向量 $a_2=(1,1,0)$ 和 $a_3=(1,0,-1)$ 的平面 $L$ 亦即平面 $x_1-x_2+x_3=0$ 上的任何直线，这个平面 $L$ 本身，通过向量 $a_1$ 的任何平面，整个空间以及零子空间.

1505. 具有基底向量 $(1,-2,1)$ 的直线，具有基底向量 $(1,1,1)$ 和 $(1,2,3)$ 的平面，亦即方程为 $x_1-2x_2+x_3=0$ 的平面，整个空间以及零子空间.

1509. $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=0$. $\lambda_1=1$ 的根子空间由向量 $c(1,1,1)$ 组成；对 $\lambda_{2,3}=0$，由 $c_1(1,1,0)+c_2(1,0,-3)$ 组成.

1510. $\lambda_1=3$, $\lambda_{2,3}=-1$. $\lambda=3$ 的根子空间由向量 $c(1,2,2)$ 组成；对 $\lambda_{2,3}=-1$，由 $c_1(1,1,0)+c_2(1,0,-1)$ 组成.

1511. $\lambda_{1,2,3}=-1$. 整个空间是根子空间.

1512. $\lambda_{1,2}=2$, $\lambda_{3,4}=0$. 根子空间由下列向量组成:

对 $\lambda_{1,2}=2$: $c_1(1,0,1,0)+c_2(1,0,0,1)$;

对 $\lambda_{3,4}=0$: $c_1(1,0,0,0)+c_2(0,1,0,1)$.

1515. (a) 任何数 $\alpha$ 是特征值. 与其相对应的特征向量的形式为 $ce^{\alpha x}$, 其中 $c\neq 0$.

(b) 对应于数 $\alpha$ 的根子空间由形如 $(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)e^{\alpha x}$ 的所有函数组成, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是任何数, $n$ 是任何非负整数.

1517. 如果最小多项式 $g(\lambda)=\lambda^n-c_n\lambda^{n-1}-c_{n-1}\lambda^{n-2}-\cdots-c_1$, 则变换 $\varphi$ 的矩阵有形式

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{pmatrix}.$$

1518. Jordan小块

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}.$$

1520. 当 $n=2$ 时, 旋转角 $\alpha\neq k\pi$ 的平面旋转不具有不变的直线. 子空间 $L$ 包含不动点的直线当且仅当变换 $\varphi$ 在 $L$ 上所导出的变换 $\varphi_1$ 具有等于 1 的特征值.

1523. **提示.** 当证明断言(a)时, 利用等式

$$1=h_1(\lambda)u_1(\lambda)+h_2(\lambda)u_2(\lambda),$$

其中 $u_1(\lambda)$ 和 $u_2(\lambda)$ 是 $\lambda$ 的多项式; (b) 由(a)推出.

1524. $g(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. $R_3=L_1\dotplus L_2$, 其中 $L_1$ 有基底 $f_1=e_1$, $f_2=e_2-e_3$, 而 $L_2$ 有基底 $f_3=e_2$.

**提示.** 当求 $g(\lambda)$ 时利用习题 1485.

1525. $g(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$. $R_3=L_1\dotplus L_2$, 其中 $L_1$ 有基底, 例如 $f_1=e_1+e_2$, $f_2=e_1-e_3$, 而 $L_2$ 有基底 $2e_1-5e_2-6e_3$.

1526. $g(\lambda)=[\lambda-(a,a)]\lambda$. $R_n=L_1\dotplus L_2$, 其中 $L_1$ 由向量 $a$ 张成, $L_2$ 由正交于 $a$ 的所有向量组成.

1527. 如果 $\lambda_0$ 是 $\varphi$ 的特征值，则 Jordan 形由一个 $n$ 阶的 Jordan 小块组成，它的对角线元素是 $\lambda_0$。

1529. **解.** (A) 我们置：

$$f_i(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}}\quad(i=1,2,\cdots,s).$$

多项式 $f_i(\lambda)$ 互素. 这意味着, 存在多项式 $h_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,s)$, 使得

$$1=\sum_{i=1}^{s}f_i(\lambda)h_i(\lambda),$$

由此, 对任何向量 $x$ 有:

$$x=\sum_{i=1}^{s}x_i,\tag{1}$$

其中 $x_i=f_i(\varphi)h_i(\varphi)x$. 因为按 Hamilton-Cayley 定理

$$(\varphi-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}x_i=f(\varphi)h_i(\varphi)x=0,$$

(由于该定理, $f(\varphi)=0$), 所以 $x_i\in P_i$.

对 $x=0$ 证明展开式(1)的唯一性就够了. 对等式 $\sum_{i=1}^{s}x_i=0$ 的两端应用变换 $f_i(\varphi)$, 因为 $f_i(\varphi)x_j=0$ 当 $j\neq i$, 我们得到: $f_i(\varphi)x_i=0$. 其次, $f_i(\lambda)$ 和 $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$ 互素. 故存在这样的一些多项式 $p(\lambda)$ 和 $q(\lambda)$, 使

$$1=p(\lambda)f_i(\lambda)+q(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{k_i};$$

由此

$$x_i=p(\varphi)f_i(\varphi)x_i+q(\varphi)(\varphi-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}x_i=0.$$

以此证明了: 空间 $R_n$ 是子空间 $P_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 的直接和, 并且所求基底的构造归结于情形(B). 在最小多项式的情形讨论是类似的 (参看习题 1523).

(B) 证明以下就够了: 所指出的构造在每一步是可能的 (被补充而成为 $R_k$ 基底的向量是线性无关的)[1], 并且所有所构造的链的向量组成空间 $R_n$ 的基底. 每个链在变换 $\psi$ 的矩阵中显然对应对角线上为零的 Jordan 小块, 而在变换 $\varphi=\lambda_0\varepsilon+\psi$ 的矩阵中则对应对角线上为 $\lambda_0$ 的小块.

在每一步构造的可能性对 $h=k, k-1, \cdots, 1$ 归纳地进行证明. 当 $h=k$, $R_{k-1}$ 任一基底的向量同开始第一步链的高为 $k$ 的向量一起, 按构造组成 $R_k$

1) "被补充的"是相对"所补充的"而言的, 着重点是译者加的. ——译者.

的基底．我们假定：已经构造出了具有高 $\geqslant h+1$ 的初始向量的链，并且所构造链高 $h+1$ 的所有向量 $x_1, \cdots, x_p$ 同 $R_h$ 任一基底的向量 $y_1, \cdots, y_q$ 一起组成 $R_{h+1}$ 的基底．我们将证明：所构造链高 $h$ 的向量 $\psi x_1, \cdots, \psi x_p$ 同 $R_{h-1}$ 任一基底 $z_1, \cdots, z_r$ 一起是线性无关的．令

$$\sum_{i=1}^{p} c_i \psi x_i + \sum_{j=1}^{r} d_j z_j = 0. \tag{2}$$

把变换 $\psi^{h-1}$ 应用于这等式的两端，我们得到：$\psi^h \sum_{i=1}^{p} c_i x_i = 0$．因此，向量 $\sum_{i=1}^{p} c_i x_i$ 属于 $R_h$ 且可用它的基底 $y_1, \cdots, y_q$ 线性表示．从向量

$$x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_q$$

（作为 $R_{h+1}$ 的基底向量）的线性无关性推出：$c_i = 0\ (i=1, 2, \cdots, p)$．因此从等式(2)推出 $d_j = 0\ (j=1, 2, \cdots, r)$；以此证明了：先前所构造链高 $h$ 的向量同 $R_{h-1}$ 任一基底的向量一起可以被补充而成 $R_h$ 的基底．取所补充的向量（如果它们存在）作为新链的初始向量，我们发现：上面对 $R_{h+1}$ 所做的假定，现在对 $R_h$ 是成立的，且这种构造可以继续下去．

令所指出的构造对 $h=k, k-1, \cdots, 1$ 已完成（事实上，整个空间的基底也可能在我们进行到 $h=1$ 以前得到）．因为 $R_0$ 没有基底，所以按所证明了的、所构造链高为 1 的向量组成 $R_1$ 的基底；这意味着，这些向量同所构造链高为 2 的向量一起组成 $R_2$ 的基底，等等．最后，所构造链高 $\leqslant k-1$ 的向量同这些链高为 $k$ 的向量一起组成 $R_k$ 的基底．换句话说，所有所构造链的向量组成整个空间的基底．

(C) 令 $C = A_J - \lambda_0 E$．因为矩阵 $B^h$ 和 $C^h$ 相似，所以矩阵 $C^h$ 的秩等于 $r_h\ (h=0, 1, \cdots, k, k+1)$．矩阵 $A_J$ 的每一个对角线元素为 $\lambda_0$ 的 Jordan 小块在矩阵 $C$ 中对应着对角线元素为零的同阶小块．如果 $D$ 是 $p$ 阶的这种小块，则小块 $D^h$ 的秩当 $h=0, 1, 2, \cdots, p$ 时等于 $p-h$，而当 $h=p, p+1, \cdots, k, k+1$ 时等于零．矩阵 $A_J$ 的对角线元素为 $\lambda_i \neq \lambda_0$ 的小块在矩阵 $C$ 中对应着的小块其对角线元素为数 $\lambda_i - \lambda_0 \neq 0$．它的任何次幂的秩等于它的阶．矩阵 $C^h$ 的秩等于它的各小块的秩的和．因此当由矩阵 $C^{h-1}$ 变到矩阵 $C^h$ 时，秩降低恰好为矩阵 $C$ 之对角线元素为零阶数 $\geqslant h$ 的小块数．由此

$$\sum_{i=h}^{k} x_i = r_{h-1} - r_h \quad (h=1, 2, \cdots, k). \tag{3}$$

由此减去用 $h+1$ 代换 $h$(当 $h<k$)的类似等式，我们得对于 $h=1, 2, \cdots, k-1$ 的关系式 ($\alpha$)．因为在矩阵 $A_J$ 中对角线元素为 $\lambda_0$ 之阶高于 $k$ 的小块不存在，所以 $r_k=r_{k-1}$，且当 $h=k$ 时关系式(3)给出：

$$x_k=r_{k-1}-r_k=r_{k-1}-2r_k+r_{k+1},$$

亦即关系式($\alpha$)对 $h=k$ 也正确．

1530. $f_1=(1, 4, 3)$, $f_2=(1, 0, 0)$, $f_3=(3, 0, 1)$; $A_J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

1531. $f_1=(1, -3, -2)$, $f_2=(1, 0, 0)$, $f_3=(1, 0, 1)$; $A_J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1532. $f_1=(6, 6, -8)$, $f_2=(3, 1, 0)$, $f_3=(2, 1, -1)$; $A_J=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1533. $f_1=(3, 1, 1)$, $f_2=(1, 0, 0)$, $f_3=(5, 0, 1)$; $A_J=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

1534. $f_1=(1, 1, 1, 1)$, $f_2=(-1, 0, 0, 0)$, $f_3=(1, 1, 0, 0)$, $f_4=(0, 0, -1, 0)$; $A_J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

1535. $f_1=(-1, -1, -1, 0)$, $f_2=(2, 1, 0, 0)$, $f_3=(1, 0, 0, -1)$, $f_4=(3, 6, 7, 1)$; $A_J=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

1536. 对偶数 $n$:

$$f_1=e_1, f_2=e_3, f_3=e_5, \cdots, f_{\frac{n}{2}}=e_{n-1}, f_{\frac{n}{2}+1}=e_2, \cdots, f_n=e_n.$$

矩阵 $A_J$ 由两个$\frac{n}{2}$阶的 Jordan 小块组成，其主对角线元素为零．

对奇数 $n$:

$$f_1=e_1, f_2=e_3, f_3=e_5, \cdots, f_{\frac{n+1}{2}}=e_n, f_{\frac{n+1}{2}+1}=e_2, \cdots, f_n=e_{n-1}.$$

矩阵 $A_J$ 由两个阶分别为$\frac{n-1}{2}$和$\frac{n+1}{2}$的 Jordan 小块组成，其主对角线元素为

零.

1537. $\varphi$ 是空间 $R_n$ 关于某子空间 $L_1$ 平行于某补子空间 $L_2$ 的反射. 换句话说. $R_n$ 是 $L_1$ 和 $L_2$ 的直接和, 并且: 如果 $x\in L_1$, $\varphi x=x$, 如果 $x\in L_2$, $\varphi x=-x$.

**提示**. 第一个方法: 分别取使得 $\varphi x=x$ 和 $\varphi x=-x$ 的所有 $x$ 的集合作为 $L_1$ 和 $L_2$. 并置

$$x=\frac{1}{2}(x+\varphi x)+\frac{1}{2}(x-\varphi x).$$

第二个方法: 考虑那个使得矩阵 $A_\varphi$ 在它之下有 Jordan 形的基底.

1538. $\varphi$ 是空间 $R_n$ 在某子空间 $L_1$ 上之平行于某补子空间 $L_2$ 的射影. 换句话说, $R_n$ 是 $L_1$ 和 $L_2$ 的直接和. 并且 $\varphi x=x$, 如果 $x\in L_1$, 以及 $\varphi x=0$, 如果 $x\in L_2$.

**提示**. 第一个方法: 分别取使得 $\varphi x=x$ 和 $\varphi x=0$ 的所有 $x$ 的集合作为 $L_1$ 和 $L_2$, 并置 $x=\varphi x+(x-\varphi x)$.

第二个方法: 考察那个使矩阵 $A_\varphi$ 在它之下有 Jordan 形的基底.

1539. (a) 对于基底 $e_1$, $e_2$, $e_3$, 变换 $\varphi$ 定义如下:

$$\varphi e_1=e_2,\quad \varphi e_2=e_3,\quad \varphi e_3=0;$$

(b) $\varphi e_1=e_2$, $\varphi e_2=-e_1$, $\varphi e_3=0$ (在标准正交基底的情形, $\varphi$ 是在平面 $e_1$, $e_2$ 上的射影并继之以将平面 $e_1$, $e_2$ 旋转 $\frac{\pi}{2}$).

1541. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1542. $\begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$.

1543. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1544. $\varphi^*$ 是平行于 $Oy$ 轴在第二和第四象限平分线上的射影.

1545. **提示**. 证明: 如果 $z\in L_1^*$, $u\in L_2^*$, 则 $\varphi^* z=0$, $\varphi^* u=u$.

1547. **提示**. 证明: 关于共轭变换 $\varphi^*$ 不变的一维子空间的正交补, 关于 $\varphi$ 不变.

1548. **提示**. 利用前题, 构造子空间链 $R_n\supset L_{n-1}\supset\cdots\supset L_1$, 其中 $L_k$ 是

关于$\varphi$不变的$k$维子空间，并应用习题 1355.

1549. $3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

1553. **提示**. 考察等式

$$(\varphi \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \varphi^* \boldsymbol{f}_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

1554. **提示**. 转到标准正交基底.

1555.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 128 & 313 & 454 \\ 36 & 117 & 145 \\ 61 & -197 & -245 \end{pmatrix}.$$

1556.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

1557.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1558.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1562. 例如，变换$\varphi$：变用在标准正交基底下的坐标所给定的向量$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$为向量$\varphi \boldsymbol{x} = (|x_1|, x_2, \cdots, x_n)$，保持纯量平方，但不是线性的.

**提示**. 为了证明$\varphi$的线性，证明：

$$(\varphi(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) - a\varphi\boldsymbol{x} - b\varphi\boldsymbol{y}, \varphi(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) - a\varphi\boldsymbol{x} - b\varphi\boldsymbol{y}) = 0.$$

1563. (a) $UA^{-1} = A'U$; (b) $U\bar{A}^{-1} = A'U$.

1566. **提示**. 证明：存在一向量$\boldsymbol{x}'_k = \boldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$（可能等于零），对于它，$(\boldsymbol{x}'_k, \boldsymbol{x}_i) = 0\ (i = 1, 2, \cdots, k-1)$，置$\boldsymbol{y}'_k = \boldsymbol{y}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \boldsymbol{y}_i$，我们得到向量组$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}'_k$和$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{k-1}, \boldsymbol{y}'_k$，它们有相等的 Gram 矩阵；然后应用数学归纳法.

1567. **提示**. 应用习题 1499.

1569. **解**. (a) 如果$\varphi \boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{z}$，则$(\varphi \boldsymbol{z}, \varphi \boldsymbol{z}) = \lambda \bar{\lambda} (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$，由此$\lambda \bar{\lambda} = 1$和$|\lambda| = 1$.

(b) 令$\varphi \boldsymbol{z}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{z}_1$，$\varphi \boldsymbol{z}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{z}_2$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$. 此时$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = (\varphi \boldsymbol{z}_1, \varphi \boldsymbol{z}_2) =$

$\lambda_1\bar{\lambda}_2(z_1, z_2)$，由此，用 $\lambda_2$ 乘之并注意到 $\lambda_2\bar{\lambda}_2=1$，我们求得 $\lambda_1(z_1, z_2)=\lambda_2(z_1, z_2)$，这意味着，$(z_1, z_2)=0$.

(*c*) 令 $X$ 和 $Y$ 是 $x$ 和 $y$ 的坐标列．将等式 $\varphi(x+yi)=(\alpha+\beta i)(x+yi)$ 转到坐标形式，我们得到 $AX+AYi=(\alpha X-\beta Y)+(\beta X+\alpha Y)i$，因此，由实部和虚部各相等，求得：$AX=\alpha X-\beta Y$；$AY=\beta X+\alpha Y$，这证明了等式(1)．将等式(1)中的头一个逐项相乘并应用关系式 $\alpha^2+\beta^2=1$，我们得到 $(\varphi x, \varphi x)=(x, x)=(\alpha^2+\beta^2)|x|^2=\alpha^2|x|^2+\beta^2|y|^2-2\alpha\beta(x, y)$．将等式(1)相乘，求得：$(\varphi x, \varphi y)=(x, y)=(\alpha^2+\beta^2)(x, y)=\alpha\beta(|x|^2-|y|^2)+(\alpha^2-\beta^2)(x, y)$.

最后，消去 $\beta$，我们得到关于量 $|x|^2-|y|^2$ 和 $(x, y)$ 的方程组：

$$\beta(|x|^2-|y|^2)+2\alpha(x, y)=0;\quad \alpha(|x|^2-|y|^2)-2\beta(x, y)=0.$$

因为这个方程组的行列式异于零，所以

$$|x|^2-|y|^2=0,\quad (x, y)=0.$$

(*d*) 如果 $\varphi$ 有实特征值，则有一维的不变子空间．否则，转到酉空间，即在酉空间 $R'_n$ 中取标准正交基底 $e_1, \cdots, e_n$．$R'_n$ 中在这基底下有实坐标的向量组成欧几里得空间 $R_n$，它包含于 $R'_n$ 之中．变换 $\varphi$ 在基底 $e_1, \cdots, e_n$ 之下有实正交矩阵 $A$．这个矩阵在该基底下确定出酉变换 $\varphi'$，它在 $R_n$ 上与 $\varphi$ 重合．变换 $\varphi'$ 有特征值 $\alpha+\beta i$，其中 $\beta\neq 0$．如果 $x-yi$ 是与之相对应的特征向量并且 $x, y$ 是具有实坐标的向量，则等式(1)成立．这意味着，空间 $R_n$ 的由向量 $x$ 和 $y$ 张成的子空间，关于 $\varphi$ 不变．

1570．(*a*) 对任何酉矩阵 $A$ 存在这样的酉矩阵 $Q$，使得矩阵 $B=Q'AQ$ 是对角形矩阵且对角线元素的模等于 1.

(*b*) 空间 $R_n$ 是两两正交的一维和二维的关于 $\varphi$ 不变的子空间的直接和．变换 $\varphi$ 保持一维子空间的向量不变或者变它们为相反的向量，而在二维子空间上引起旋转角 $\gamma$ 的旋转．对任何正交矩阵 $A$ 存在这样的正交矩阵 $Q$，使得矩阵 $B=Q'AQ$ 有习题中所指出的那种标准形式．

**提示**．利用习题 1567 和 1569 并应用数学归纳法．

1571．$f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, )$，

$f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$，

$f_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$；

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

1572. $f_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1,1,0)$,

$f_2=(0,0,1)$,

$f_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1,-1,0)$;

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

1573. $f_1=\frac{1}{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}(-2-\sqrt{2},\ -4-3\sqrt{2},\ \sqrt{2})$,

$f_2=\frac{1}{\sqrt{84}}(6\sqrt{2},-2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$,

$f_3=\frac{1}{\sqrt{84}}(0,\sqrt{42-28\sqrt{2}},\ \sqrt{42+28\sqrt{2}})$;

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-2+7\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}{12}\\ 0 & \frac{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}{12} & \frac{-2+7\sqrt{2}}{12}\end{pmatrix}.$$

1574.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

1575.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

1576.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

1577.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1578.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}i\\ -\frac{2}{3}i & \frac{1}{3}i & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}i & -\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

1584. $\varphi$或者是恒等变换，或者是关于维为$k=0,1,2,\cdots,n-1$的某子空间$L$的对称，亦即$\varphi x=x$对$L$中的任何$x$，以及$\varphi x=-x$对正交补$L^*$中的任何$x$.

1585. $\boldsymbol{f}_1=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$,

$\boldsymbol{f}_2=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$,

$\boldsymbol{f}_3=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$;

$$B=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

1586. $\boldsymbol{f}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$,

$\boldsymbol{f}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{18}},\ -\frac{1}{\sqrt{18}},\ -\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$,

$\boldsymbol{f}_3=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$;

$$B=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

1587. $\boldsymbol{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0)$,

$\boldsymbol{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)$,

$\boldsymbol{f}_3=(0,0,1)$;

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1588.

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

1589.

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix};\quad C=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}.$$

1590. **提示.** 令 $E_{ij}$ 是一矩阵，其第 $i$ 行和第 $j$ 列处是 1，而在其他位置是零。在标准正交基底：

$$E_{11},\ E_{21},\ \cdots,\ E_{n1},\ E_{12},\ E_{22},\ \cdots,\ E_{n2},\ \cdots,\ E_{nn}$$

下考察所有变换的矩阵.

1591. (a) $UA = A'U$; (b) $U\overline{A} = A'U$.

1592. 两个实二次型用同一个正交变换化为标准形式，当且仅当它们的矩阵是可换的. 两个二次曲面有平行的主轴，当且仅当它们方程中二次项系数所组成的矩阵是可换的. **提示.** 证明：变换 $\varphi$ 属于同一个特征值 $\lambda$ 的所有特征向量构成的子空间 $L_\lambda$ 关于第二个变换 $\psi$ 是不变的.

1593. 如果

$$A_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{pmatrix}\quad 和\quad B_j=\begin{pmatrix}b_{i1}\\b_{i2}\\\vdots\\b_{in}\end{pmatrix}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$ 分别是 $P$ 和 $Q$ 的标准正交特征向量列，则 $n^2$ 个矩阵 $X_{ij}=A_iB'_j$ $(i,j=1,\cdots,n)$，其中在矩阵 $X_{ij}$ 的第 $k$ 行和第 $l$ 列处是乘积 $a_{ik}b_{jl}$，组成变换 $\varphi$ 和 $\psi$ 的特征向量的标准正交基底；并且任何如此的基底从矩阵 $P$ 和 $Q$ 的特征向量的某标准正交基底用上述所指出的方法得到.

1594. 例如，如果平面的线性变换 $\varphi$ 在标准正交基底下用矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{pmatrix}$ 给定，且向量 $x=(1,1)$ 是用在该基底下的坐标给定的，则 $(\varphi x, x)=-1$.

1595. **提示.** 可以利用习题 1276(c). 较简单的是在变换 $X$ 的特征向量的标准正交基底下考察变换 $\varphi,\psi,\chi$ 的矩阵.

1596. **提示.** 存在性象在习题 1276 一样地证明. 利用前题可更简单地证明唯一性.

1597. 具有矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ 的变换的特征值等于 $3,-1$，亦即不是两个正的.

1598.

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

1599.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

1600.

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1602. **提示.** 求非奇异变换 $\chi$, 使得 $\chi^2=\varphi$, 并证明: 变换 $\chi^{-1}\varphi\psi\chi$ 是自共轭的.

1603. **提示.** 令 $\varphi_1$ 和 $\psi_1$ 是具有非负特征值的自共轭变换, 使得 $\varphi_1^2=\varphi$ 和 $\psi_1^2=\psi$. 如果 $\varphi$ 非奇异, 则置 $\chi=\varphi_1\psi_1$ 后证明: $\chi\chi^*=\varphi_1^{-1}\varphi\psi\varphi_1$.

1605. **提示.** 考察变换在特征向量基底下的矩阵.

1606. **提示.** 考察一标准正交基底, 在它之下 $\varphi$ 的矩阵是对角形的, 并作出向新基底的转移.

1607. **提示.** 证明从 $A$ 和 $B$ 到 $C$ 的转移运算的分配性. 考察在西空间 $\boldsymbol{R}_n$ 某标准正交基底下用矩阵 $A, B, C$ 所给出的线性变换 $\varphi, \psi, \chi$. 把变换 $\varphi$ 和 $\psi$ 分解成具有矩阵 $A_1, \cdots, A_r$ 和 $B_1, \cdots, B_s$ 的, 秩为 1 的非负自共轭变换的和. 利用习题 1606, 证明: 具矩阵 $(A_i, A_j)$ 的变换在该基底下是非负的. 最后利用习题 1604, 证明: 变换 $\chi$ 是非负的.

1609. **提示.** 证明类似于自共轭变换相应的性质的证明.

1610. **解.** 性质($a$)和($b$)的证明类似于自共轭变换的相应性质的证明.

性质($c$)的证明: 令 $X$ 和 $Y$ 分别是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的坐标列. 把等式 $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}i)=\beta i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}i)$ 转为坐标形式, 我们得到: $AX+AYi=-\beta Y+\beta Xi$, 因此, 由实虚部各相等求得: $AX=-\beta Y, AY=\beta X$, 这证明了等式(1). 因为矩阵 $A$ 是实的, 所以对实向量 $\boldsymbol{z}$, 向量 $\varphi\boldsymbol{z}$ 和数 $(\varphi\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$ 是实的. 因此 $(\varphi\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{z}, -\varphi\boldsymbol{z})=-(\boldsymbol{z}, \varphi\boldsymbol{z})=-(\varphi\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$. 就是说 $(\varphi\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})=0$. 用 $\boldsymbol{y}$ 乘等式(1)的第二式, 得到 $\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(\varphi\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})=0$, 由此 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$. 用 $\boldsymbol{y}$ 乘等式(1)中的第一式, 用 $\boldsymbol{x}$ 乘第二式并相加, 由于数 $(\varphi\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})=\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ 是实数, 我们得到 $\beta(|\boldsymbol{x}|^2-|\boldsymbol{y}|^2)$

$=(\varphi x, y)+(\varphi y, x)=(\varphi x, y)+(x, \varphi y)=(\varphi x, y)-(\varphi x, y)=0$，因此 $|x|=|y|$.

性质 $(d)$ 的证明：如果变换 $\varphi$ 有数 0 是特征值，则有一维不变子空间. 否则，我们转到酉空间. 即在酉空间 $R_n'$ 中我们取一个标准正交基底 $e_1, \cdots, e_n$. $R_n'$ 中在这基底下有实坐标的向量组成欧几里得空间 $R_n$，它含于 $R_n'$ 中. 变换 $\varphi$ 在基底 $e_1, \cdots, e_n$ 下有实斜对称矩阵 $A$. 这个矩阵在该基底下确定出酉空间 $R_n'$ 的斜对称变换 $\varphi'$，在 $R_n$ 上 $\varphi'$ 与 $\varphi$ 重合. 变换 $\varphi'$ 有特征值 $\beta i \neq 0$. 如果 $x+yi$ 是对应的特征向量，其中 $x$ 和 $y$ 是具有实坐标的向量，则等式(1)成立. 这就是说，由 $x$ 和 $y$ 张成的子空间是不变的.

1611. $(a)$ 对任何斜 Hermite 矩阵 $A$ 存在如此的酉矩阵 $Q$，使得矩阵 $B=Q^{-1}AQ$ 是对角线上为纯虚元素的对角形矩阵，其中某些对角线元素可能等于零.

$(b)$ 空间是彼此正交的一维和二维的关于 $\varphi$ 不变的子空间的直接和. 变换 $\varphi$ 变一维子空间的向量为零，而在对应于小块 $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ 的二维子空间上，引起角为 $\frac{\pi}{2}$ 的旋转并随之乘以数 $-\beta$. 对任何实斜对称矩阵 $A$ 存在如此的实正交矩阵 $Q$，使得矩阵 $B=Q^{-1}AQ$ 有在习题正文中所述的那种标准形式.

**提示**. 利用习题 1609 和 1610 并应用数学归纳法.

1614. 如果 $A$ 是斜 Hermite 矩阵，则矩阵 $B=(E-A)(E+A)^{-1}$ 是没有等于 $-1$ 的特征值的酉矩阵. 反之，如果 $A$ 是没有等于 $-1$ 的特征值的酉矩阵，则矩阵 $B=(E-A)(E+A)^{-1}$ 是斜 Hermite 矩阵. 在实斜对称矩阵和正交矩阵之间有类似的联系.

**解**. 我们只研究酉空间的情形. 在等式(1)中令 $\varphi$ 是斜对称变换($\varphi^*=-\varphi$). 此时,

$$\psi^*=(\varepsilon+\varphi^*)^{-1}(\varepsilon-\varphi^*)=(\varepsilon-\varphi)^{-1}(\varepsilon+\varphi)=(\varepsilon+\varphi)(\varepsilon-\varphi)^{-1}=\psi^{-1},$$

因为 $\varepsilon+\varphi$ 和 $(\varepsilon-\varphi)^{-1}$ 是可换的. 这就是说，$\psi$ 是酉变换. 我们注意：$(\varepsilon\pm\varphi)^{-1}$ 存在，因为数 $\pm1$ 不是 $\varphi$ 的特征值(习题 1610, $(a)$).

其次,

$$\varepsilon+\psi=(\varepsilon+\varphi)(\varepsilon-\varphi)^{-1}+(\varepsilon-\varphi)(\varepsilon+\varphi)^{-1}=2(\varepsilon+\varphi)^{-1}, \qquad (\alpha)$$

这意味着，$\psi$ 没有数 $-1$ 作为特征值. 此外，$\varphi$ 可以借助类似于(1)的等式用

$\psi$ 表达之. 事实上, 从等式($\alpha$)求得: $\varepsilon+\varphi=2(\varepsilon+\psi)^{-1}$, $\varphi=2(\varepsilon+\psi)^{-1}-\varepsilon=2(\varepsilon+\psi)^{-1}-(\varepsilon+\psi)(\varepsilon+\psi)^{-1}=(\varepsilon-\psi)(\varepsilon+\psi)^{-1}$. 反之, 令在等式(1)中 $\varphi$ 是没有特征值 $-1$ 的酉变换. 则 $\psi^*=(\varepsilon+\varphi^*)^{-1}(\varepsilon-\varphi^*)=(\varepsilon+\varphi^{-1})^{-1}(\varepsilon-\varphi^{-1})=(\varphi+\varepsilon)^{-1}\varphi\varphi^{-1}(\varphi-\varepsilon)=-(\varepsilon-\varphi)(\varepsilon+\varphi)^{-1}=-\psi$, 因为 $\varepsilon-\varphi$ 和 $(\varepsilon+\varphi)^{-1}$ 是可换的. 这意味着, $\psi$ 是斜对称变换. 此外, $\varphi$ 可借助于类似等式(1)的等式用 $\psi$ 表达之. 这可以借助等式($\alpha$)逐字逐句地重复上面论述得到证明. 这样一来, 等式(1)把所有斜对称变换映射为没有特征值 $-1$ 的酉变换, 且反之亦然; 并且这两个映射之一是另一个的逆映射. 这证明: 两个映射是一对一的.

1616. 如果矩阵 $A$ 是斜 Hermite 矩阵 (或者实斜对称矩阵), 则矩阵 $e^A$ 是酉矩阵(或相应地, 正交矩阵).

1617. **解**. 按习题 1559. 变换 $e^\varphi$ 是自共轭的. 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $\varphi$ 的特征值, 则它们是实的, 且按习题 1161, $e^\varphi$ 的特征值是 $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$, 亦即 $e^\varphi$ 是正定的. 我们来证明: 不相同的自共轭变换 $\varphi$ 和 $\varphi'$ 对应于不相同的变换 $e^\varphi$ 和 $e^{\varphi'}$. 令 $e^\varphi=e^{\varphi'}$; $\varphi$ 具有特征向量的标准正交基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 其中 $\varphi\alpha_i=\lambda_i\alpha_i (i=1, 2, \cdots, n)$. 令 $\alpha'$ 是变换 $\varphi'$ 属于特征值 $\lambda'$ 的任何特征向量; $\alpha'=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$. 此时按习题 1464,

$$e^{\varphi'}\alpha'=e^{\lambda'}\alpha'=\sum_{i=1}^n e^{\lambda'}x_i\alpha_i.$$

另一方面,

$$e^\varphi\alpha'=\sum_{i=1}^n x_i e^\varphi\alpha_i=\sum_{i=1}^n x_i e^{\lambda_i}\alpha_i.$$

因为 $e^{\varphi'}\alpha'=e^\varphi\alpha'$, 所以对那些使 $e^{\lambda_i}\neq e^{\lambda'}$ 的所有的 $i$, $x_i=0$, 以及 $e^{\lambda_i}=e^{\lambda'}$, 如果 $x_i\neq 0$. 因为 $\lambda_i$ 和 $\lambda'$ 是实的, 所以从 $x_i\neq 0$ 推出 $\lambda_i=\lambda'$. 因此 $\varphi\alpha'=\sum_{i=1}^n x_i\varphi\alpha_i=\sum_{i=1}^n x_i\lambda_i\alpha_i=\sum_{i=1}^n x_i\lambda'\alpha_i=\lambda'\alpha'=\varphi'\alpha'$. 因为 $\varphi'$ 具有特征向量的基底且在这基底上与 $\varphi$ 重合, 所以 $\varphi=\varphi'$. 令 $\psi$ 是任何正定变换. 存在一标准正交基底, 在它之下 $\psi$ 的矩阵是对角线上有正元素 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 的对角形矩阵. 置 $\lambda_i=\ln\mu_i (i=1, 2, \cdots, n)$, 其中 $\lambda_i$ 是实对数值, 且令变换 $\varphi$ 在该基

底下用对角线元素为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的对角形矩阵给定. 变换 $\varphi$ 是自共轭的, 且 $\psi = e^{\varphi}$.

1625. **提示.** 应用习题 1507.

1626. 如果 $r$ 是 $\varphi$ 的秩, 则此种变换的个数等于 $k^r$.

1627. **提示.** 证明等式

$$(\varphi \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x},\ \varphi \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}) = (\varphi^* \mathbf{x} - \bar{\lambda} \mathbf{x},\ \varphi^* \mathbf{x} - \bar{\lambda} \mathbf{x}).$$

1628. **提示.** 利用前题.

1629. **提示.** 利用习题 1627.

1630. **提示.** 利用习题 1627 和 1629.

1631. **提示.** 应用习题 1629 数次.

1632. **提示.** 为证必要性, 利用前两题. 为证充分性, 证明: 酉空间的具有正规性的变换 $\varphi$, 有特征向量的标准正交基. 把欧几里得空间的情形化归到酉空间的情形.

1633. **提示.** 利用前题.

# 增　补

1634. (1)是,(2)是,(3)是,(4)是,(5)不是,(6)不是,(7)不是,(8)是,(9)不是,(10)是,(11)是,(12)不是,(13)是,(14)是,(15)是,(16)是,(17)不是,(18)是,(19)不是,(20)是,(21)是,(22)是,(23)是,(24)是,(25)不是,(26)是,(27)是,(28)是,(29)是,(30)是,(31)是,(32)不是,(33)不是,(34)是,(35)不是,(36)是.

1637. **提示**. 第一个方法：证明对于给定的 $n$ 阶群 $G$ 中的任一个 $a$, 有 $|a|=1$. 当 $n>1$ 时,在 $G$ 中取一个有最小正幅角 $\psi$ 的元素 $b=\cos\psi+i\sin\psi$, 并证明

$$G=\{1, b, b^2, \cdots, b^{n-1}\}.$$

第二个方法：利用 Lagrange 定理,证明 $a^n=1$. 对 $G$ 中的任一个 $a$.

1638. (a) 一个群——三阶循环群——元素是 $e, a, b$, 而群表是

| | $e$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $e$ | $a$ |

用置换表示时,我们可令 $e$ 是单位元素,而 $a=(1\ 2\ 3)$, $b=(1\ 3\ 2)$.

(b) 两个群：(1)元素是 $e, a, b, c$ 的四阶循环群,群表为

| | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $e$ | $a$ | $b$ |

用置换表示时,我们可令 $e$ 是单位元素, $a=(1\ 2\ 3\ 4)$, $b=(1\ 3)(2\ 4)$, $c=(1\ 4\ 3\ 2)$;

(2) 元素是 $e, a, b, c$ 的四元群,群表是

| | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |

用置换表示时，我们令 $e$ 是单位元素，$a=(1\ 2)(3\ 4)$，$b=(1\ 3)(2\ 4)$，$c=(1\ 4)(2\ 3)$.

(c) 两个群：(1) 元素为 $e,a,b,c,d,f$ 的六阶循环群，群表是

| | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $f$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $f$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $f$ | $f$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

用置换表示时，我们令 $e$ 是单位元素，$a=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$，$b=(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$，$c=(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$，$d=(1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$，$f=(1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$；

(2) 元素为 $e,a,b,c,d,f$ 的三次对称群，群表为

| | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $e$ | $d$ | $f$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $e$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $f$ | $d$ | $e$ | $b$ | $a$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $f$ | $a$ | $e$ | $b$ |
| $f$ | $f$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |

用置换表示时，我们可令 $e$ 是单位元素，$a=(1\ 2\ 3)$，$b=(1\ 3\ 2)$，$c=(1\ 2)$，$d=(2\ 3)$，$f=(1\ 3)$.

**提示.** 证明：如果在 $n$ 阶群 $G$ 中有一个 $k$ 个元素的集合 $H$，$k<n$，$H$ 关于在 $G$ 中所定义的乘法运算也是一个群，则当用不在 $H$ 中的元素 $x$ 乘 $H$ 中的所有元素时，我们得到 $k$ 个新的 $G$ 的元素．因此，$k\leqslant\frac{n}{2}$．我们可以取元素 $e, a, a^2, \cdots, a^{k-1}$ 所成之集作为 $H$，其中 $a^k=e$．例如，在(c)的情形(2)，亦即对于六阶的非循环群 $G$，必须 $k\leqslant 3$．如果对 $G$ 中的任一个 $a$ 有 $a^2=e$，则四个元素 $e, a, b, ab$ 就会形成一个群，但这是不可能的．所以存在一个元素 $a$，对于它，$a^2=b\neq e$，但 $a^3=e$．用新元素 $c$ 乘元素 $e, a, a^2$，我们得到群 $G$ 的所有的六个元素，形式是 $e, a, a^2=b, c, ac=d, a^2c=f$．需要证明 $c^2=d^2=f^2=e$ 和 $ca=a^2c=f$．例如，假如 $ca=ac$，则先用 $c$ 然后用 $a^2$ 左乘之，我们将有 $a^2cac=fd=e$，由此，$fd=d^2$，$f=d$，这是不可能的．

1639．四面体群是12阶的，立方体群和八面体群是 24 阶的，十二面体群和二十面体群是 60 阶的．**提示．** 考虑把给定顶点 $A$ 变到某一顶点 $B$（不必与 $A$ 不同）的各旋转，并证明：群的阶等于 $nk$，其中 $n$ 是顶点数而 $k$ 是由一个顶点射出的棱数．

1643．**提示．** 对群 $G$ 的每一个元素 $x$，使之对应于如下一个映射：$a\to ax$，对 $G$ 的每一个元素 $a$．

1646．$\pm 1$．

1648．**提示．** (a) 考虑 $(ab)^{pr}$ 和 $(ab)^{ps}$，其中 $p$ 是 $ab$ 的阶．

(b) 考虑 $(ab)^p$，其中 $p$ 是 $ab$ 的阶．并证明 $a^p=b^{-p}=e$．

**例 1．** 关于元素 $a\neq e$、$b=a^{-1}$，条件(1)满足但条件(2)不满足．断言(b)不成立，因为 $a$ 和 $b$ 的阶彼此相等，但不等于 1，然而 $ab=e$ 的阶等于 1．

**例 2** 对称群 $S_3$ 的元素 $a=(1\ 2)$，$b=(1\ 2\ 3)$ 的阶分别是素数 2 和 3．条件(1)不满足：因为 $ab=(1\ 3)$，$ba=(2\ 3)$，但条件(2)满足．断言(b)不成立：$a$ 是 2 阶的，$b$ 是 3 阶的，而 $ab$ 是 2 阶的．

(c) 取等式 $a^k=b^l$ 两端的 $s$ 次幂，$s$ 是 $b$ 的阶．

(d) **例 3．** 在 8 阶循环群 $\{a\}$ 中元素 $a, a^3, a^5$ 是 8 阶的，但 $aa^3=a^4$ 是 2 阶的，$aa^5=a^6$ 是 4 阶的．

1649．(2)和(3)是(1)的；(4)和(11)是(13)的；(1)，(2)，(3)，(13)，(14)是(8)的；(15)是(16)的；(20)和(21)是(18)的；(20)是(21)的；(24)是(23)的；(23)和(24)是(26)的；(29)和(30)是(31)的；(34)是(36)的．

1653．无限循环群，所有素数阶的循环群，以及单位元群．

1654. (a) $G=\{a\},\{a^2\},\{a^3\},\{e\}$;

(b) $G=\{a\},\{a^2\},\{a^3\},\{a^4\},\{a^6\},\{a^8\},\{a^{12}\},\{e\}$;

(c) $G=\{e,a,b,c\},\{a\},\{b\},\{c\},\{e\}$;

(d) 使用置换的轮换记法，我们得到子群是 $S_3$, $\{(1\ 2\ 3)\}$, $\{(1\ 2)\}$, $\{(1\ 3)\}$, $\{(2\ 3)\}$, $\{e\}$;

(e) 正规子群是 $S_3$, $\{(1\ 2\ 3)\}$, $\{e\}$;

(f) **提示.** $A_4$ 的置换的轮换分解中，只能包含长为 1 的轮换，两个长为 2 的轮换或者一个长为 3 的轮换. 所以 $A_4$ 没有 6 阶的循环子群[参看习题 1648(a)和(b)]并且所有它的 2 阶元素是可换的. 所以，$A_4$ 没有同构于 $S_3$ 的子群. 但是任何一个 6 阶群或者是循环的或者同构于 $S_3$[习题 1638(c)].

1655. 在 $G$ 中我们选出下列元素：首先取 $a\neq e$，然后取 $b\neq e,a$，再后取 $c\neq e,a,b,ab$. $G$ 的其余元素是 $ab$, $ac$, $bc$, $abc$. $G$ 是一个 Abel 群(习题 1636). $G$ 有下列 16 个子群：$\{e\}$, $\{e,a\}$, $\{e,b\}$, $\{e,c\}$, $\{e,ab\}$, $\{e,ac\}$, $\{e,bc\}$, $\{e,abc\}$, $\{e,a,b,ab\}$, $\{e,a,c,ac\}$, $\{e,b,c,bc\}$, $\{e,a,bc,abc\}$, $\{e,b,ac,abc\}$, $\{e,c,ab,abc\}$, $\{e,ab,ac,bc\}$, $\{e,a,b,c,ab,ac,bc,abc\}=G$.

1657. 用加法来写，所有子群的形式是

$$G_0=\{a\},\ G_1=\{pa\},\ G_2=\{p^2a\},\ \cdots,$$

$$G_{k-1}=\{p^{k-1}a\},\ G_k=\{p^ka\}=\{0\}.$$

它们形成一个阶数分别为 $p^k, p^{k-1}, p^{k-2}, \cdots, p, 1$ 的递降子群链.

**提示.** 利用习题 1656(b)，或者证明子群$\{sa\}$与子群$\{p^la\}$重合，其中 $0<s<p^k$, $s=p^lt$, $0\leqslant l<k$ 并且 $t$ 是不被 $p$ 整除的数.

1658. (a) **提示.** 把置换分解为轮换并验证 $(i_1i_2i_3\cdots i_k)=(i_1i_2)(i_1i_3)\cdots(i_1i_k)$.

(b) **提示.** 验证等式 $(1i)(1j)(1i)=(ij)$.

(c) **提示.** 验证两个对换的积可以如下地用三元轮换表示：

$$(ij)(ik)=(ijk),\ (ij)(kl)=(ijk)(ilk).$$

(d) **解.** 令 $G$ 是交代群 $A_n$ 的由所述三元轮换的集合所生成的子群，又令 $i,j,k$ 是超过 2 的不同的数(对于 $n=3$，断言是显然的，$n=4$ 时，下面所给

出的证明被简化). 同轮换$(1\ 2\ i)$一起, $G$ 也包含逆元素$(i\ 2\ 1)$, 从而$G$包含

$$(1\ 2\ j)(1\ 2\ i)(j\ 2\ 1)=(1\ i\ j);$$
$$(j\ 2\ 1)(i\ 2\ 1)(1\ 2\ j)=(2\ i\ j).$$

当$n=4$时,这说明$G$包含所有的三元轮换. 当$n>4$时,它包含$(1\ 2\ k)(1\ i\ j)(k\ 2\ 1)=(i\ j\ k)$. 所以,$G$包含所有的三元轮换,按$(c)$,它与$A_n$重合.

1660. **提示.** 令$K$是群$G$中那些不属于$H$的元素集合,又令$a$是$K$中的任一元素. 证明: 用$H$的所有元素乘$a$, 我们得到$K$的所有元素. 从这一事实推出: 用$K$中的所有元素乘$a$时,我们得到$H$的所有元素. 特别地, $a^2$属于$H$.

1661. 一个例子是元素为$e, a, b, c$的四元群(参看习题1638的答案). 它有三个二阶的循环子群: $\{a\}$, $\{b\}$和$\{c\}$.

**提示.** 证明: 将所有三元轮换平方,我们仍得到所有的三元轮换, 并利用习题1658和1660.

1662. (a) **提示.** 四面体$ABCD$的每一个旋转对应着其顶点的一个置换. 两个旋转的积对应着相应两个置换的积. 两个不同的旋转$s$和$t$对应着不同的置换,因为否则的话,非恒等旋转$st^{-1}$就会与保持所有顶点固定的恒等置换对应. 从习题1639的答案, 四面体群与对称群$S_4$的一个12阶的子群同构. 然后,或者证明四面体旋转所对应的所有置换都是偶置换, 或者利用习题1661.

(b) **解.** 八面体各面的中心是立方体的顶点. 因此, 八面体群和立方体群是同构的. 立方体的每一个旋转对应着它四条对角线的一个置换. 旋转的乘积对应着相应置换的乘积. 让我们考虑立方体的所有旋转. 它们是: 恒等旋转, 绕各对角线转过角$\frac{2\pi}{3}$和$\frac{4\pi}{3}$的8个旋转,绕穿过对棱中点的轴转过角$\pi$的6个旋转,绕穿过对面的中心的轴转过角$\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{4}$和$\frac{3\pi}{4}$的9个旋转. 这些旋转的总数是$1+8+6+9=24$. 按照习题1639的答案, 它们穷举了立方体的所有旋转. 直接检验表明,只在恒等旋转下, 所有4条对角线保持固定不变. 从这一事实,如同(a)一样, 我们推出: 立方体群同构于4个元素的置换群(它的阶是24),亦即同构于对称群$S_4$.

(c) **解.** 十二面体各面的中心是二十面体的顶点. 所以,二十面体群和十二面体群是同构的. 对于二十面体的每条棱,有一条对棱平行于它, 有两

双棱垂直于它：一双棱起始于衔接于该棱的两个面的顶点，另一双棱属于以该棱终点为顶点的两个面．同一双棱中的棱是平行的，不同双中的棱彼此垂直．这样一来，所有 30 条棱被分成 5 组，每组有 6 条．同一组中的棱或者平行或者垂直，而不同组的棱不平行也不垂直．每一组棱都对应着一个八面体：这八面体的顶点是该组各棱的中点．这样确定出了 5 个内接于二十面体的八面体．二十面体的每一个旋转对应着上面所述五个棱组的一个置换（或者说，对应着相应的五个八面体的一个置换）．两个旋转的积对应着相应置换的积．现在让我们来考虑二十面体的所有旋转．它们包括恒等旋转；绕通过对立顶点的 6 个轴中的每个轴，转过角 $\frac{2\pi}{5}$、$\frac{4\pi}{5}$、$\frac{6\pi}{5}$、$\frac{8\pi}{5}$ 的旋转，这有 24 个旋转；绕穿过对面的中心的 10 根轴中的每根轴，转过角 $\frac{2\pi}{3}$、$\frac{4\pi}{3}$ 的旋转，这又有 20 个旋转；绕通过对棱中点的 15 根轴中的每根轴，转过角 $\pi$ 的旋转，这有 15 个旋转．旋转的总数是 $1+24+20+15=60$．按照习题 1639 的答案，它们穷举了二十面体的所有旋转．直接验证表明：对于每一个非恒等旋转，都能找到一条棱，这条棱在该旋转下被变为另一条既不平行也不垂直于原棱的棱．因此，棱组的恒等置换对应的只能是恒等旋转．从这一事实，象在(*a*)一样，我们推出：二十面体群同构于对称群 $S_5$ 的一个 60 阶的子群．按照习题 1661，这个子群与交代群 $A_5$ 重合．

1668．**提示**．(*a*) 应用习题 1667．

(*b*) 证明：每一个陪集恰好包含一个保持数 4 原地不动的置换．

1669．把给定置换 $s$ 分解成独立轮换，如果分解式中长为 $l_i$ 的轮换有 $k_i$ 个，$i=1, 2, \cdots, r$（长为 1 的轮换也计算在内），则与 $s$ 可换的置换数等于 $\prod_{i=1}^{r}(k_i)!\cdot l_i^{k_i}$．认为 $0!=1$，我们可以把所求之数写成另外一种形式．令 $j_i$ 是包含在 $s$ 的分解式中长为 $i$ 的轮换数，其中 $i=1, 2, \cdots, n$，并且如果在分解式中没有长为 $i$ 的轮换，则令 $j_i$ 等于零．此时所求的数等于 $\prod_{i=1}^{n}(j_i)!\,i^{j_i}$．

**提示**．出现在 $s$ 的分解式中的有同样长度 $l$ 的各轮换，当用一个与 $s$ 可换的置换 $x$ 来变换时，只可能互换；并且任一轮换的第一个数可以变成同长

度的任何轮换（这轮换要在 $s$ 的分解式中出现）的任何数.

1672. **提示.** 考虑这两个元素的换位子 $h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}$.

1673. **提示.** (*a*) 利用习题 1671;

(*b*) 利用习题 1672.

1674. 把 $s$ 分解为独立轮换，如果在分解式中有 $k_i$ 个长为 $l_i$ 的轮换，$i=1, 2, \cdots, r$（考虑所有的轮换，包括长为 1 的在内），则所求之数等于

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{r}(k_i)!\cdot l_i^{k_i}}.$$

这个数的分母可象 1669 题答案那样改写.

1675. **提示.** 设元素数为 $p^k$ 的共轭类有 $a_k$ 个，利用习题 1673，证明 $a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots=p^n$.

1676. **提示.** 如果 $H$ 包含轮换 $(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma)$，而 $\alpha'$、$\beta'$、$\gamma'$ 是从 1 到 $n$ 的任意不相同的数，则用置换

$$x=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \cdots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & \varepsilon' & \cdots\end{pmatrix}$$

来变换轮换 $(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma)$，其中 $\delta'$ 和 $\varepsilon'$ 选择得使置换 $x$ 是偶的. 利用习题 1667 和 1658(*c*).

1677. **解.** (*a*) 形成二十面体群的所有 60 个旋转已在习题 1662(*c*) 答案中给出. 恒等旋转是群的单位元并构成一类. 共轭元素有相同的阶. 5阶的元素是下面的 24 个旋转：绕通过对顶点的 6 根轴中的每一根，转过角 $\frac{2k\pi}{5}$ 的旋转，$k=1, 2, 3, 4$. 以下我们说绕顶点 $A$ 转角为 $\alpha$ 的旋转，指的是绕通过 $A$ 和一个对顶点的轴、沿从 $A$ 到对顶点看上去是反时针地转过角 $\alpha$ 的旋转. 对每一个顶点，在以该顶点为顶点的各平面角中我们指定出一个来，以下称这个被指定的平面角为注册角. 二十面体的每一个旋转，完全决定于指明给定的顶点 $A$ 所变到的顶点 $B$（$B$ 可以重合于 $A$），以及顶点 $A$ 的注册角所变到的 $B$ 处的平面角. 所以把 $A$ 变为 $B$ 的每一个旋转可表示为乘积的形式 $x=yz$，其中 $y$ 把 $A$ 的注册角变为 $B$ 的注册角，而 $z$ 是绕顶点 $B$ 转角为 $\alpha$ 的旋转. 逆元素 $x^{-1}=z^{-1}y^{-1}$ 是旋转 $z^{-1}$ 和 $y^{-1}$ 的乘积；$z^{-1}$ 是绕顶点 $B$ 转角为 $-\alpha$ 的旋转，$y^{-1}$ 是变 $B$ 的注册角为 $A$ 的注册角的旋转. 现在设 $g$ 是绕

顶点 $A$ 转角为 $\alpha$ 的旋转．而 $x$ 是群中变 $A$ 为 $B$ 的任一元素．把 $x$ 按上述方式表为乘积的形式 $x=yz$ 后，我们发现共轭元素 $x^{-1}gx=z^{-1}y^{-1}gyz$ 也是转角为 $\alpha$ 的旋转，但这时已是绕顶点 $B$．特别地，如果 $A$ 和 $B$ 是对顶点，则绕 $B$ 转角为 $\alpha$ 的旋转与绕 $A$ 转角为 $2\pi-\alpha$ 的旋转重合．这样一来，绕顶点转角为 $\frac{2\pi}{5}$ 和 $\frac{8\pi}{5}$ 的所有旋转属于一个共轭元素类．转角为 $\frac{4\pi}{5}$ 和 $\frac{6\pi}{5}$ 的所有旋转也属于一个共轭元素类．我们现在证明：绕顶点 $A$ 转角为 $\frac{2\pi}{5}$ 和 $\frac{4\pi}{5}$ 的旋转 $g_1$ 和 $g_2$ 属于不同的类．如果 $x$ 把 $A$ 变为相异的顶点 $B$，则 $x^{-1}g_1x$ 是绕 $B$ 的旋转，从而，或者不是绕 $A$ 的旋转，或者（如果 $B$ 是 $A$ 的对顶点）是绕 $A$ 转角 $\frac{8\pi}{5}$ 的旋转．就是说，$x^{-1}g_1x\neq g_2$．但是，如果 $x$ 是绕 $A$ 的旋转，则 $g_1$ 和 $x$ 是绕 $A$ 旋转的循环（因之，可换）子群的元素，仍有 $x^{-1}g_1x=g_1\neq g_2$．

于是，所有的 5 阶元素分成两类，每类 12 个元素．类似地，给每个面的一个平面角打上记号（即令这平面角是注册角）并给每条棱的一个顶点打上记号后，我们可以确信：三阶的 20 个元素（即绕通过对面中心的轴转角为 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{4\pi}{3}$ 的各旋转）组成一类，二阶的 15 个元素（即绕通过对棱中点的轴转角为 $\pi$ 的各旋转）也组成一类．

(*b*) 正规子群应由一些完整的类组成，应包含单位元素，并且它的阶应当能整除 60（二十面体群的阶）．按照(*a*)，各共轭元素类分别包含 1, 12, 12, 20 和 15 个元素．用这些数来组成和，只有两个和既包含 1 作加项又能除尽 60：即 1 和 60．这样，只得出两个正规子群：单位元子群和群本身．

1678. **提示**．利用习题 1662(*c*) 和 1677(*b*)．

1681. 一个同态完全被生成元素 $a$ 的象所决定．下面指出 $a$ 的可能的象：

(*a*) 群的任一元素；同态数等于 $n$；

(*b*) $e, b^3, b^6, b^9, b^{12}, b^{15}$；

(*c*) $e, b, b^2, b^3, b^4, b^5$；

(*d*) $e, b^5, b^{10}$；

(*e*) $e$.

1683. (*a*) 4 阶的循环群 $\{\varphi\}$，其中 $a\varphi=a^2$；

(*b*) 2 阶的循环群 $\{\varphi\}$，其中 $a\varphi=a^5$；

(*e*) 模 5 的剩余域;

(*f*) 模 6 的剩余环;

(*g*) 模 $n$ 的剩余环.

1685. (*a*) $n$ 阶循环群;

(*b*) 5 阶循环群;

(*c*) 6 阶循环群;

(*d*) 2 阶循环群.

1688. **提示.** 在(*d*)、(*e*)和(*h*)的情形,考虑映射$f(z)=z^n$,在情形(*f*)考虑映射 $g(z)=\frac{z^n}{|z|^n}$.

1691. 群 $S_3$ 中的子群{(1 2)}有指数 3,但不包含 2 阶的元素(1 3).

1693. **提示.** 假定 $G/Z$ 是循环群,在作为群 $G/Z$ 的生成元素的类中,选一个元素 $a$,并证明:$a$ 和 $Z$ 生成整个群 $G$.

1694. **解.** 对群$G$的阶 $n$ 进行归纳证明. 当 $n=2$ 时,群$G$是二阶循环群,所以定理对 $n=2$ 成立. 令定理对阶小于 $n$ 的所有群都成立,又令 $G$ 是一个 $n$ 阶群. 首先设$G$是可换的. 在$G$中取任一个不是单位元素 $e$ 的元素 $a$,令它的阶是 $k>1$. 如果 $k$ 被 $p$ 整除,$k=pq$,则元素 $a^q$ 是 $p$ 阶的. 如果 $k$ 不被 $p$ 整除,则$G$关于循环子群$\{a\}$的商群 $G'=G/\{a\}$的阶 $n'$,等于 $\frac{n}{k}<n$且能被 $p$ 整除. 按照归纳法的假定,$G'$ 包含 $p$ 阶元素 $b'$. 令 $b$ 是陪集 $b'$ 中的元素. 从等式 $b'^p=e'$($e'$ 是 $G'$ 的单位元素)推出 $b^p$ 包含在子群$\{a\}$中,亦即 $b^p=a^l$,其中 $b^{pk}=a^{lk}=e$. 如果 $b^k=e$,则 $b'^k=e'$ 而 $k$ 被元素 $b'$ 的阶 $p$ 所整除,这是不可能的. 所以,$b^{kp}=e$ 但 $b^k\neq e$,亦即元素 $b^k$ 是 $p$阶的.

现在设群$G$是非可换的. 如果有一个与$G$不同的子群 $H$,它的指数不能被 $p$ 整除,则$H$的阶小于 $n$ 并能被 $p$ 整除. 按归纳法的假定,$H$ 包含一个 $p$ 阶的元素. 如果所有与$G$不同的$G$的子群的指数都被 $p$ 整除,此时若令 $Z$ 是 $G$ 的中心(习题 1664),$a$ 是不属于 $Z$ 的任一元素,则与 $a$ 共轭的元素数被 $p$ 整除(习题 1671). 因为$G$的阶 $n$ 也被 $p$ 整除,由此推知:中心 $Z$ 的阶被 $p$ 整除且小于 $n$(因为 $G$ 是非可换的). 由归纳法的假设,$Z$ 包含 $p$阶的元素.

1695. **提示.** 利用前题.

1701. (*a*) $\{a\}=\{3a\}+\{2a\}$;

(b) $\{a\}=\{4a\}+\{3a\}$;

(c) $\{a\}=\{15a\}+\{20a\}+\{12a\}$;

(d) $\{a\}=\{225a\}+\{100a\}+\{36a\}$.

1702. **提示.** 在情形(c)利用习题 1700(b).

1703. **提示.** (a) 取$G$中分别使 $pa=0$ 和 $qb=0$ 的所有元素 $a$ 的集合和所有元素 $b$ 的集合作为 $A$ 和 $B$;

(b) 设$n$是群$G$的阶，考虑$n$的素因子分解 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$，并应用(a).

1704. (a) $G(3)$; (b) $G(4)$, $G(2,2)$; (c) $G(2,3)$; (d) $G(8)$, $G(2,4)$, $G(2,2,2)$; (e) $G(9)$, $G(3,3)$; (f) $G(4,3)$, $G(2,2,3)$; (g) $G(16)$, $G(2,8)$, $G(4,4)$, $G(2,2,4)$, $G(2,2,2,2)$; (h) $G(8,3)$, $G(2,4,3)$, $G(2,2,2,3)$; (i) $G(2,3,5)$; (j) $G(4,9)$, $G(2,2,9)$, $G(4,3,3)$, $G(2,2,3,3)$; (k) $G(16,3)$, $G(2,8,3)$, $G(4,4,3)$, $G(2,2,4,3)$, $G(2,2,2,2,3)$; (l) $G(4,3,5)$, $G(2,2,3,5)$; (m) $G(9,7)$, $G(3,3,7)$; (n) $G(8,9)$, $G(2,4,9)$, $G(2,2,2,9)$, $G(8,3,3)$, $G(2,4,3,3)$, $G(2,2,2,3,3)$; (o) $G(4,25)$, $G(2,2,25)$, $G(4,5,5)$, $G(2,2,5,5)$.

1705. 如果 $Z_k$ 是 $k$ 阶循环群而 $Z$ 是无限循环群，则所求的商群 $G/H$ 的直接分解有如下形式:

(a) $Z_2+Z_2+Z_3$; (b) $Z_3+Z_4$;

(c) $Z_2+Z_3+Z_3$; (d) $Z_2+Z_4$;

(e) $Z_4+Z$; (f) $Z_2+Z_2+Z$;

(g) $Z_3$; (h) $Z+Z$;

(i) $Z$;

(k) $G/H$ 是零群，所求的分解不存在.

1706. (c)群$G$可以唯一地分解为子群的直接和:

$$G=A_1+A_2+\cdots+A_s,$$

其中 $A_i$ 是 $p_i$ 阶的循环子群. $G$的任一非零子群$H$是若干子群 $A_i$ 的直接和. 所有子群数等于 $2^s$.

**提示.** 利用(b)，并证明: 如果$h$是子群$H$的生成元，则$H$是那些包含着$h$的非零分量的子群 $A_i$ 的直接和.

1707. **提示.** (c) 为了证明分解 $G=H+K$, 在 $H$ 之外取任一元素 $a_1$, 然后在 $\{H, a_1\}$ 之外取任一元素 $a_2$, 等等, 并令 $K=\{a_1, a_2, \cdots\}$.

(d) 任一 $p^l$ 阶的子群 $H$ 可以分解为 $l$ 个 $p$ 阶循环子群的直接和. 假设分解式如下:

$$H=\{a_1\}+\{a_2\}+\cdots+\{a_l\}.$$

我们求所有组 $(a_1, a_2, \cdots, a_l)$ 的个数, 这些组是以相应的方式对所有 $p^l$ 阶子群 $H$ 确定出来的. 因为 $a_1\neq 0$, 推知: 对 $a_1$ 而言, 我们有 $p^k-1$ 种可能. 因为 $a_2$ 在循环群 $\{a_1\}$ 之外, 推知: 对 $a_2$ 而言, 我们有 $p^k-p$ 种可能, 等等. 用类似的方法, 我们求得产生一个 $p^l$ 阶群 $H$ 的所有组 $(a_1, a_2, \cdots, a_l)$ 的个数. 所有 $p^l$ 阶子群的个数等于所求得的二数的商.

1708. **提示.** 首先考虑准素群的情形, 然后将群进行准素分量分解[习题 1703(b)]并应用习题 1700(b).

1709. 环. 1710. 环.

1711. 环. 当 $n=0$ 时, 我们得到仅由一个数 0 组成的零环, 这数是此环的单位元素, 同时也是自己的逆元素. 零环不是域, 因为域必须包含多于一个元素.

1712. 域. 1713. 域. 1714. 域.

1715. 环. 1716. 域. 1717. 环.

1718. 域. 1719. 环. 1720. 环.

1721. 环. 1722. 环. 1723. 环.

1724. $a, b$ 是有理数时, 形成一个域; 是实数时, 形成一个环但不是域.

1725. 关于正弦和余弦的多项式组成环, 仅含余弦的多项式也组成环, 但仅含正弦的多项式不形成一个环.

**提示.** 为了证明正弦多项式不形成环, 利用下一事实: 两个奇函数的积是一个偶函数.

1726. 不形成环. **提示.** 利用多项式 $x^3-2$ 在有理数域上的不可约性证明: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4}$ 不属于所考察的集合.

1727. $\frac{1}{43}(5+9\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})$. **提示.** 为了证明唯一性, 利用多项式 $x^3-2$ 在有理数域上的不可约性. 利用待定系数法, 求逆元素.

1728. $x^{-1}=\frac{1}{208}(19-\sqrt[3]{5}+11\sqrt[3]{25})$.

1729. **提示.** 利用不可约多项式的下述性质: 与低次的任一多项式是

互素的.

1730. $\beta^{-1}=\frac{1}{405}(101-37\alpha+4\alpha^2)$.

**提示.** 如果 $\varphi(x)=x^2-x+3$, 则用待定系数法求一次多项式 $f_1(x)$ 和二次多项式 $\varphi_1(x)$ 使成立等式 $f(x)f_1(x)+\varphi(x)\varphi_1(x)=1$, 并在这等式中令 $x=\alpha$.

1732. 例如,

$$f_1(x)=\begin{cases}0 & 当\ x\leqslant 0,\\ x & 当\ x\geqslant 0,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}x & 当\ x\leqslant 0,\\ 0 & 当\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

1734. 零因子有如下形: $(a, 0)$ 和 $(0, b)$, 其中 $a\neq 0, b\neq 0$.

1737. 左上角一元素非零的矩阵, 不是左零因子, 但是是右零因子.

1738. **提示.** 用两种不同的方法去掉乘积 $(a+b)(e+e)$ 中的括号.

1740. 元素取自一给定域、从第二行开始所有各行由零组成的 $n\geqslant 2$ 阶矩阵, 组成一个有一些左单位元的环; 在关于列的类似条件下, 组成一个有一些右单位元的环.

1742. **提示.** 令 $a$ 是环的非零元素. 证明: 对应 $x\to ax$ (其中 $x$ 是任何元素), 是该环到自身上的一对一映射.

1743. **提示.** 利用习题 1742.

1747. **提示.** 求与单位元素 $1, i, j, k$ 相对应的矩阵 $E, I, J, K$, 并对它们验证乘法表: $I^2=J^2=K^2=-E, IJ=-JI=K, JK=-KJ=I, KI=-IK=J$.

1749. 只可能有两个这种自同构: 恒等自同构和变每一个数为其共轭数的自同构.

1750. **提示.** 证明任一个数域包含数 1, 然后证明包含整数, 最后证明包含分数.

1751. **提示.** 考虑 1 的象, 整数的象和分数的象.

1752. **提示.** 证明: 正数, 作为实数的平方, 变为正数. 然后利用下列事实: 在两不同的实数之间有有理数, 以及有理数的保持性, 去证明任何实数的不变性.

1753. 这种映射只能有两个: 恒等映射和变任何复数为其共轭数的

映射.

1756. 模 3 的方程组是不相容的；但模 5 的方程组有唯一解：$x=2, y=3, z=2$.

1757. 模 5 的方程组是不相容的，但模 7 的方程组有唯一解：$x=2, y=6, z=5$.

1758. (a) $x+2$, (b) 1.

1759. (a) 1, (b) $5x+1$.

1760. (a) $x^2+x+2$, (b) 1.

1761. **解**. 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在有理数域上有正次数的公因式 $d(x)$. 于是 $f(x)=a(x)\cdot d(x)$, $g(x)=b(x)\cdot d(x)$, 其中 $a(x)$, $b(x)$, $d(x)$ 是有理系数的多项式. 去掉系数的公分母和分子的最大公因子，并应用关于本原多项式乘积的 Gauss 引理，我们得到：$f(x)=a_1(x)d_1(x)$, $g(x)=b_1(x)d_1(x)$, 其中所有多项式都有整系数，$d_1(x)$ 的次数等于 $d(x)$ 的次数并且 $d_1(x)$ 的首项系数不被 $p$ 整除. 变到模 $p$ 的剩余域，我们在这域上得到 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的正次数的最高公因式，但这是不可能的.

(b) 多项式 $f(x)=x$, $g(x)=x+p$ 在有理数域上是互素的，但在模 $p$ 的剩余域上它们都等于 $x$, 从而，它们在模 $p$ 的剩余域上不互素.

1762. **提示**. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是互素的(在有理数域上)，则有等式 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=c$, 其中 $u(x)$, $v(x)$ 是整系数的多项式，而 $c$ 是一个整数. 用此等式证明 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在模 $p$ 的剩余域上互素，其中 $p$ 是不整除 $c$ 的任一素数.

当证明逆命题时，利用习题 1761.

1763. $(x+1)^3(x^2+x+1)$.

1764. $(x+3)(x^2+4x+2)$.

1765. $(x^2+1)(x^2+x+2)$.

1766. $(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$.

1767. $f_1=x^2$, $f_2=x^2+1=(x+1)^2$, $f_3=x^2+x=x(x+1)$, $f_4=x^2+x+1$ 是不可约的.

1768. $f_1=x^3$, $f_2=x^3+1=(x+1)(x^2+x+1)$, $f_3=x^3+x=x(x+1)^2$, $f_4=x^3+x^2=x^2(x+1)$, $f_5=x^3+x+1$ 是不可约的. $f_6=x^3+x^2+1$ 不可约. $f_7=x^3+x^2+x=x(x^2+x+1)$, $f_8=x^3+x^2+x+1=(x+1)^3$.

1769. $f_1=x^2+1$, $f_2=x^2+x+2$, $f_3=x^2+2x+2$.

1770. $f_1=x^3+2x+1$, $f_2=x^3+2x+2$, $f_3=x^3+x^2+2$, $f_4=x^3+2x^2+1$, $f_5=x^3+x^2+x+2$, $f_6=x^3+x^2+2x+1$, $f_7=x^3+2x^2+x+1$, $f_8=x^3+2x^2+2x+2$.

1771. **提示**. 利用 Gauss 引理，并从 $f(x)$ 分为有理系数的两个因子的分解中，得到分为整系数的两个因子的分解. 多项式 $f(x)=px^2+(p+1)x+1=(px+1)(x-1)$ 在有理数域上是可约的，但关于模 $p$，它等于 $x+1$，所以是不可约的.

1772. **提示**. 假设相反，把群 $G$ 分解为准素循环子群的直积，利用习题 1700($c$) 和下一定理：方程 $x^n=1$ 在域 $Z_p$ 中不相同的根不多于 $n$ 个.

1773. **解**. 首先证明群论中的一条引理. 如果循环群 $G$ 的两个元素 $a$ 和 $b$ 不是二次幂，则它们的积是一个二次幂.

群 $G$ 中是二次幂的元素的集合 $H$，是一个子群，商群 $G/H$ 是循环群. 如果 $C=cH$ 是它的生成元，则从 $c^2\in H$ 推出 $C^2=c^2H=H$. 所以，或者 $H=G$，或者 $G/H$ 是二阶群并且 $ab\in aH\cdot bH=H$，亦即 $ab$ 是二次幂.

由此推出：关于任一个素数模 $p$，数 2, 3, 6 中的一个同余于一个二次幂. 实际上，当 $p=2$ 时我们有 $2\equiv 0^2$，当 $p=3$ 时我们有 $3\equiv 0^2$. 如果 $p>3$，则 2 和 3 可以视为模 $p$ 剩余域的乘法群 $G$ 中的元素. 由习题 1772，群 $G$ 是循环群，并且由上面证明了的引理，如果 2 和 3 不是二次幂，则 $2\cdot 3=6$ 是二次幂.

多项式

$$f(x)=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

$$(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})=x^4-10x^2+1$$

在有理数域上是不可约的，因为各线性因子及每次取两个因子的积都不是有理系数的多项式.

令 $Z_p$ 是素模 $p$ 的剩余域. 从上面所证，存在一个元素 $a\in Z_p$，使或者 $a^2=2$，或者 $a^2=3$，或者 $a^2=6$. 如果 $a^2=2$，则 $x^4-10x^2+1=(x^2+2ax-1)(x^2-2ax-1)$；如果 $a^2=3$，则 $x^4-10x^2+1=(x^2+2ax+1)(x^2-2ax+1)$；如果 $a^2=6$，则 $x^4-10x^2+1=(x^2-5+2a)(x^2-5-2a)$.

1774. **提示**. 证明：如果 $a=ae$，则 $e$ 是单位元素.

1775. ($a$) 模 $p^2$ 的剩余环，$a=p$；($b$) 模 $p^n$ 的剩余环，$a=p$. 此处，$p$

是大于1的任一整数.

1779. **提示**. 对于数 $z=a+b\sqrt{-3}$, 我们引进模方 $N(z)=z\cdot\bar{z}=a^2+3b^2$. 证明: $N(z_1\cdot z_2)=N(z_1)N(z_2)$; 对于给定的$M>0$, 只存在有限多个 $z$ 使 $N(z)<M$; 仅有的单位因子是$\pm1$; 有大于1的最小模方的因子 $z$ 是素因子.

1780. **提示**. 用未知量的变换,把不可逆元素变为高于2次的多项式.

1781. ($a$)理想,($b$)子环,($c$)理想,($d$)不是加法群的子群,($e$)子环,($f$)加法群的子群,($g$)理想,($h$)子环,($i$)理想,($j$)理想,($k$)不是加法群的子群.

1785. **提示**. 证明: 任一个理想 $I$ 是由其下列意义下的最小非零元素 $a$ 所生成的: ($a$)在绝对值意义下,($b$)在次数的意义下,($c$)在模的意义下. 在每种情形,利用用元素 $b\neq0$ 除的带余除法的存在性; 余数或者等于零,或者在上述意义下小于除数.

1791. 如果对 $Z$ 中的任何 $n\neq0$, 有 $ne\neq0$, 则 $\varphi$ 是一个同构, 并且 $\varphi(Z)$ 同构于 $Z$. 如果对 $Z$ 中的某些 $n\neq0$, 有 $ne=0$, 而 $n_0$ 是使 $n_0e=0$ 的最小正数,则 $\varphi(Z)$ 同构于模 $n_0$ 的剩余环.

1792. ($b$)四个陪集由具有下列性质的数 $a+bi$ 组成: (1)$a$ 和 $b$ 是偶数,(2)$a$ 是偶数而 $b$ 是奇数,(3)$a$ 是奇数而 $b$ 是偶数,(4)$a$ 和 $b$ 是奇数; ($c$)包含 $1+i$ 的陪集$B$ 是零因子,且 $B^2=0$.

1799. 元素个数等于 $p^n$.

1800. 1. $R$ 是有零因子的环,把它看成自身上的模, $\lambda$ 和 $a$ 是零因子: $\lambda a=0$.

2. $G=\{a\}$ 是(用加法来写的)$n$ 阶循环群,把它看成是整数环上的模.此时 $na=0$.

1804. **提示**. 利用习题 1647($c$).

1807. ($b$)令 $a$ 和 $b$ 是四元群[参看习题1638($b$)]的两个不同的二阶元素. 如果把这个群看成整数环上的单位模(群的元素与数的乘法象通常一样),则 $O(a)$和 $O(b)$与偶数集合重合,但是$\{a\}\neq\{b\}$.

1808. **提示**. 证明: 使 $\lambda a\in A$ 的所有 $\lambda\in R$ 的集合 $I$, 是$R$的一个理想.

1809. 有有限多个非零分量的所有元素的集合 $A$.

1810. ($b$)例1. 在模6的剩余环 $Z_6$ 中, 元素2和3是周期元素, 在该环自身上的模中也如此,可是它们的和5不是周期元素.

例2. 令 $R$ 是数对$(x,y)$所成的环,其中 $x$ 和 $y$ 是整数,数对的加法和乘

法施加于分量之上(习题1734)．元素 $a=(1,0)$ 和 $b=(0,1)$ 是零因子．如果把 $R$ 看成自身上的模，则因为 $O(a)$ 是形如 $(0,y)$ 的所有数对的集合、$O(b)$ 是形如 $(x,0)$ 的所有数对的集合，所以 $a$ 和 $b$ 是周期元素．但是元素 $a+b=(1,1)$ 的阶是零元素 $(0,0)$．

1811．**提示**．令 $\alpha=\alpha'\delta$，$\beta=\beta'\delta$，并证明：$\alpha'\beta'\delta(a+b)=0$，$\alpha\gamma b=0$．

1812．**提示**．证明：$M$ 是非零子模 $M_i$ 的直接和，其中每一个 $M_i$ 由 $M$ 中所有如下的元素所组成：每一个元素的阶是由 $R$ 中同一个元素 $p_i$ 的幂所生成．

1813．**提示**．考虑模 $M_i$ 的并．

1819．**提示**．证明 $b\to A+b$ 是 $B$ 到 $(A+B)/A$ 上的同态映射，并利用模的同态定理．

1820．**提示**．用对 $n$ 的归纳证明．当 $n=1$ 时，利用习题1815和1818．当 $n>1$ 时，假定在 $M$ 中存在不相同子群的一个无限递增链 $M_1\subset M_2\subset\cdots$；令

$$A=\{x_1\},\ B=\bigcup_{i=1}^{\infty}M_i,\ M_i'=M_i\cap A.$$

并证明：链 $M_i'$ 在某 $M_k'=A\cap B$ 变成稳定的．然后应用同构定理（参看习题1819）并利用下一事实：商模 $M/A$ 有 $n-1$ 个生成元．

1822．**提示**．当证明(b)时，考虑式子 $(1+1)\times(x+y)$．

1823．(c)空间 $V$ 是无限维的．

1825．**提示**．用归纳法证明，或在线性关系中令 $x=1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}$．

1826．**提示**．在情形(c)，(d)，(e)，微分两次并应用归纳法．

1827．**提示**．利用 Vandermonde 行列式．

1829．维数等于 $C_{k+n-1}^{n-1}=C_{k+n-1}^{k}$．**提示**．取所有的单项式作为基底，并且，使形式为 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 的每一个单项式对应于行

$$\underbrace{1\cdots1}_{\alpha_1\text{次}}\ x_1\ \underbrace{1\cdots1}_{\alpha_2\text{次}}\ x_2\ \cdots\underbrace{1\cdots1}_{\alpha_n\text{次}}\ x_n.$$

1830．$C_{k+n}^{n}$．**提示**．令 $x_i=\dfrac{y_i}{y_{n+1}}$ 并归结到前题．

1831．(b) $L$ 的维数等于 $n$；

(c) $L_k$ 的维数是 $n-k+1$；

(d) $L'$ 不是子空间.

1832. **提示.** 当证明必要性时，得到等式 $B=CA$，其中 $C$ 是如下的非奇异矩阵：由用组(1)表示组(2)的系数所组成的矩阵. 当证明充分性时，把向量 $b_i$ 的坐标行添加在矩阵 $A$ 下面，并且，用加边方法计算秩时证明所得到的矩阵的秩等于 $k$.

1836. (d) 在平面 $xOy$ 中，假设 $L=Ox$，$M=Oy$，并设 $L'$ 是穿过坐标原点且不同于坐标轴的任一直线，$\varphi_1$ 是平行于 $M$ 在 $L$ 上的射影，$\varphi_2$ 是平行于 $M$ 在 $L'$ 上的射影. 则 $\varphi_1\varphi_2=\varphi_1\neq\varphi_2=\varphi_2\varphi_1$. 条件(3)不成立. 但 $\varphi_1\varphi_2$ 和 $\varphi_2\varphi_1$ 都是射影.

**提示.** (b) 证明：如果 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 是幂等的，则 $\varphi_1+\varphi_2$ 是幂等的当且仅当 $\varphi_1\varphi_2+\varphi_2\varphi_1=0$. 用 $\varphi_1$ 左乘和右乘这等式，证明：它等价于条件(1).

(c) 利用(a)，把(c)归结到(b).

(d) 从 $\varphi_1\varphi_2 x=x$ 得到 $\varphi_1 x=\varphi_2 x=x$. 然后利用表示式 $x=\varphi_2 x+(\varepsilon-\varphi_2)x$.

1837. **提示.** 考虑 $(\varphi(x_1+x_2),y)$ 和 $(\varphi(\lambda x),y)$.

1838. $\frac{1}{5}\sqrt{10}$.

1839 如果 $L$ 是如下所有向量的子空间：每一个向量中仅有限多个坐标不是零；则

$$L^*=0,\ L\dot{+}L^*=L\neq V,\ (L^*)^*=V\neq L.$$

1841. 令在标准正交基底下，$A$ 是变换矩阵. (a) 平面绕坐标原点转过某一角的旋转，如果 $|A|=+1$；平面关于通过原点的某直线的反射，如果 $|A|=-1$；(b) 空间绕通过原点的轴转过某一角的旋转，如果 $|A|=+1$；上述旋转继之以空间的一个反射——关于通过原点且垂直于旋转轴的平面所做的反射，如果 $|A|=-1$.

1842. 绕由向量 $f=(1,1,0)$ 确定的轴，按负方向转过 $\alpha=60°$ 的旋转.
**提示.** 作为属于特征值 1 的特征向量我们求得向量 $f$. 由变换 $\varphi$ 的矩阵的迹的不变性得到条件 $2\cos\alpha+1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$，由此求得旋转角 $\alpha$. 为了确定旋转的方向，我们取一个不在旋转轴上的向量，比如说 $e_1$，以及它的象 $\varphi e_1$ 和轴向量 $f$，并求由这三个向量的坐标所组成的行列式的正负号，进而定出三向量组 $e_1,\varphi e_1,f$ 的定向.

1843. (a) 零变换；

(b) 按正方向或负方向转过角$\frac{\pi}{2}$的旋转后继之乘以一个非负数；

(c) $\varphi x=a\times x$. 当$a\neq 0$时，变换$\varphi$归结为把向量$x$投影到垂直于$a$的平面上，再绕$a$按正方向转过角$\frac{\pi}{2}$，并乘以长$a$. **提示.** 考虑在标准正交基底下$\varphi$的变换矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

并置$a=(a_1,a_2,a_3)$，其中$a_1=-a_{23}, a_2=a_{13}, a_3=-a_{12}$.

1844. **提示.** 当证明充分性时，考虑纯量积$(\varphi(x+y), x+y)$.

1845. **提示.** 求基底$e_1, e_2, \cdots, e_n$使有

$$l(e_1)=1,\quad l(e_2)=\cdots=l(e_n)=0.$$

1848. **提示.** 假定$l_1(a)\neq 0$, $l_2(b)\neq 0$并考虑向量$a+b$.

1849. **提示.** 证明：如果$b(x,y)\neq 0$，则

$$\frac{l_1(x)}{l_2(x)}=\frac{l_1(y)}{l_2(y)}=\lambda\neq 0.$$

考虑乘积$(l_1(x)-\lambda l_2(x))l_2(x)$并应用习题1848.

1850. **提示.** 利用习题1846和1849.

1851. **提示.** 利用习题1848.

1852. **提示.** 置$y=x-\frac{l(x)}{l(a)}\cdot a$.

1853. **提示.** 对于非零函数，取不在$S$中的向量$a$，令$\lambda=\frac{l_1(a)}{l_2(a)}$，并应用习题1852(b).

1854. (a)单叶双曲面；(b)双叶双曲面.

**提示.** 变到齐次坐标.

1856. 如果$e_1, e_2, \cdots, e_n$是一个标准基底（使在它之下$f(x)$可以写为标准形式的二次型）且$f(e_i)=1\ (i=1,2,\cdots,p)$，$f(e_j)=-1\ (j=p+1,\cdots,r)$，$f(e_k)=0\ (k=r+1,\cdots,n)$，则，例如，可以取如下向量作为所求基底：

$$f_i=e_i+e_{p+1}\quad (i=1,\cdots,p);$$

$$f_j=e_p+e_j\quad (j=p+1,\cdots,r);$$

$$f_k=e_k\quad (k=r+1,\cdots,n).$$

**提示.** 证明向量

$$f_{ij}=e_i+e_j\ (i=1,\cdots,p;\ j=p+1,\cdots,r);$$

$$g_{ij}=e_i-e_j\ (i=1,\cdots,p;\ j=p+1,\cdots,r);$$

$$h_k=e_k\ (k=r+1,\cdots,n)$$

是迷向向量而基底 $e_1,\cdots,e_n$ 可用这些向量表示.

1857. **提示.** 利用习题 1306 和 1856.

1858. **提示.** 在条件 $p\leqslant q$ 下考虑情形(b). 对于标准形式的型我们采取记法 $f(x)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$, 验证 $K$ 包含由方程

$$x_1-x_{p+1}=0,\ \cdots,\ x_p-x_{2p}=0,$$

$$x_{2p+1}=0,\ \cdots,\ x_{p+q}=0 \qquad (1)$$

所给出的子空间 $L$, $L$ 的维数等于 $n-q$. 然后假设 $K$ 包含由方程

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n-s) \qquad (2)$$

给出的、维数 $s>n-q$ 的子空间 $L'$, 把方程

$$x_1=0,\ \cdots,\ x_p=0,\ x_{p+q+1}=0,\ \cdots,\ x_n=0 \qquad (3)$$

添加到它们上, 得出矛盾.

1859. (a)**解.** 如果 $f(x)$ 在适当的基底下写成了标准形, 则曲面 $S$ 的方程可写成:

$$x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_n^2=1. \qquad (1)$$

如果 $p=0$, 则 $S$ 上没有实点. 此时, $\min(p-1,q)=-1$. 如果空集的维数取为 $-1$, 则定理成立.

令 $p>0$. 则 $S$ 上有点存在, 例如, $(1,0,\cdots,0)$, 亦即零维的流形. 令 $P$ 是 $S$ 中的最大维 $k$ 的一个流形. $P$ 由 $n-k$ 个线性无关方程的方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,2,\cdots,n-k) \qquad (2)$$

给出. 这组不能是齐次的, 因为零解不满足方程(1). 为简化起见, 我们假定由前 $n-k$ 个未知量系数所组成的 $n-k$ 阶行列式 $d$ 不等于零. 此时, 组(2)的通解可以写出如下:

$$x_i=c_{i,n-k+1}x_{n-k+1}+\cdots+c_{i,n}x_n+c_{i,n+1}\ (i=1,2,\cdots,n-k). \qquad (3)$$

考虑 $n+1$ 维的空间 $V_{n+1}$, 在其中我们取出任一基底, 并假定 $V_n$ 是由

这基底的前 $n$ 个向量所张成的.

考虑齐次方程组:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i x_{n+1} = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n-k), \tag{4}$$

系数如同(2)中一样. 通解的形式是

$$x_i = c_{i,n-k+1}x_{n-k+1} + \cdots + c_{i,n}x_n + c_{i,n+1}x_{n+1} \quad (i=1,2,\cdots,n-k). \tag{5}$$

系数跟(3)中一样.

其次考虑由方程

$$x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_n^2-x_{n+1}^2=0 \tag{6}$$

所定义的锥 $\boldsymbol{K}$.

我们证明: 用组(4)给出的 $k+1$ 维子空间 $\boldsymbol{L}$ 位于锥 $\boldsymbol{K}$ 内. 组(4)的任一个使 $x_{n+1}=1$ 的解, 在丢弃 $x_{n+1}$ 之后, 产生组(2)的一个解, 亦即在 $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{S}$ 中的一个向量. 但是这种解满足方程(6), 所以, 它位于 $\boldsymbol{K}$ 中.

如果 $\boldsymbol{x}$ 是组(4)的使 $x_{n+1}=\alpha\neq 0$ 的任一个解, 则 $\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$, 由此 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$.

令

$$\boldsymbol{x}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-k},\alpha_{n-k+1},\cdots,\alpha_n,0)$$

是组(4)使 $x_{n+1}=0$ 的解. 存在组(4)的解 $\boldsymbol{x}^l$ 使得这解的自由未知量有值

$$x_{n-k+1}=\alpha_{n-k+1},\cdots,x_n=\alpha_n,\ x_{n+1}=\frac{1}{l}(l=1,2,\cdots).$$

从公式(5)显然 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{x}^l=\boldsymbol{x}$. 从上面已证, 知 $\boldsymbol{x}^l\in\boldsymbol{K}$. 在(6)中代进 $\boldsymbol{x}^l$ 的坐标后, 令 $l\to\infty$, 取极限, 我们得到 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$.

于是 $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{K}$. $\boldsymbol{K}$ 的惯性指标等于 $p, q+1$. 按照习题 1858, $k+1\leqslant\min(p,q+1)$. 所以, $k\leqslant\min(p-1,q)$.

令 $\boldsymbol{K}'$ 是方程为

$$\pm x_2^2\pm\cdots - x_{p+1}^2-\cdots-x_n^2=0 \tag{7}$$

的锥. 其中正负号与方程(1)的对应项的正负号一致. 由习题 1858, 锥 $\boldsymbol{K}'$ 包含维数 $k=\min(p-1,q)$ 的子空间 $\boldsymbol{L}'$, 后者含于方程为 $x_1=0$ 的子空间内. 在 $\boldsymbol{V}_n$ 中取向量 $\boldsymbol{a}_0=(1,0,\cdots,0)$. 则 $S$ 包含维数 $k=\min(p-1,q)$ 的流形 $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{L}'$. 这就完成了断言(a)的证明.

(*b*) **提示**. 当 $r<n$ 时，把(*b*)化为 $r$ 维空间中的(*a*).

1860. (*a*)1; (*b*)0; (*c*)1; (*d*)0; (*e*)1; (*f*)1; (*g*)$n-1$; (*h*)$n-2$; (*i*)0; (*j*)1, 如果 $n>2$; 0, 如果 $n=2$; (*k*)1; (*l*)$\frac{n-1}{2}$的整数部分或$\frac{n}{2}-1$, 如果 $n$ 是偶数; $\frac{1}{2}(n-1)$, 如果 $n$ 是奇数.

1861. (*b*)**提示**. 求确定左核和右核的线性方程组.

1862. $L_0^l$的基底由向量(3, −1)形成, 而 $L_0^r$ 的基底则由(2, −1)形成.

1863. (*b*) **提示**. 令 $1<r\leq n$. 取如下一函数: 使这函数在某基底下的矩阵的左上角是 $r$ 阶的既不对称也不斜对称的方块, 其他地方是零.

1864. **提示**. 利用函数 $b(x,y)$的零子空间.

1865. **提示**. 证明: $L^*$中所有向量的坐标满足矩阵方程 $BAY=0$, 其中 $A$ 是 $b(x,y)$在空间 $V_n$ 的某基底下的矩阵, 矩阵 $B$的各行是子空间 $L$的任一基底的坐标(在 $V_n$ 的给定基底下), 而$Y$是(在同一基底下)向量 $y\in L^*$ 的坐标列.

1866. 第一证明. 因为 $b(x,y)\neq 0$, 但是$b(x,x)\equiv 0$, 推出: 存在向量 $x_1$ 和 $x_2$ 使 $b(x_1,x_2)\neq 0$, 用$\frac{1}{b(x_1,x_2)}$乘这两个向量中的一个, 我们得到向量 $e_1$, $e_2$ 并有 $b(e_1,e_2)=1$. 向量 $e_1$ 和 $e_2$ 是线性无关的, 因为如果 $e_2=\alpha e_1$, 则 $b(e_1,e_2)=\alpha b(e_1,e_1)=0$. 令 $L_1$ 是由 $e_1$, $e_2$ 所张成的二维子空间, 又令 $L_2$ 是使

$$b(x,y)=0, \text{对任何 } x\in L_1$$

的所有 $y\in V_n$ 的集合. 由习题 1865, $L_2$ 是维数$\geq n-2$ 的子空间. $L_1$ 和$L_2$的交只包含零向量. 因为如果 $x\in L_1$, 则 $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2$. 如果 $x\in L_2$, 则 $b(e_1,x)=b(e_2,x)=0$ 和 $b(e_1,e_1)=b(e_2,e_2)=0$; $b(e_1,e_2)=-b(e_2,e_1)=1$, 所以 $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $x=0$. 由习题1296, $L_2$ 的维数是 $n-2$, 而 $V_n$ 是 $L_1$ 和 $L_2$的直接和. 如果在 $L_2$ 上我们也有 $b(x,y)\neq 0$, 则象上面一样, 存在向量 $e_3$, $e_4\in L_2$ 且使 $b(e_3,e_4)=1$, 等等. 有限步之后, 我们得到子空间 $L_{k+1}$, 在这子空间上, $b(x,y)\equiv 0$. 如果 $L_{k+1}$ 是非零子空间, 则于其中取来任一基底 $e_{2k+1},\cdots,e_n$. 向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 即为所求基底.

第二证明. 这个证明提供了一个实用方法以找出未知量的非奇异线性变换, 使在这变换下把已给双线性型化到题中所指的标准形式.

假定在某一基底下，$b(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$，改变未知量的编号，我们可以假设 $a_{12}\neq0$. 把型写为

$$b(x,y)=x_1(a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n)-y_1(a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)+b_1(x,y),$$

进行未知量的非奇异变换

$$x_1'=x_1,\ x_2'=a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\ x_3'=x_3,\ \cdots,\ x_n'=x_n,$$

以及关于 $y_i$ 的同样的变换. 这得出

$$b(x,y)=x_1'y_2'-x_2'y_1'+b_2(x,y)$$

如果 $b_2(x,y)$ 不包含 $x_2',y_2'$，则我们以同样方式继续进行下去，否则，$b_2(x,y)=\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}'x_i'y_j'$，其中 $a_{2k}'\neq0$，对某 $k$，$2\leqslant k\leqslant n$. 进行未知量的非奇异变换

$$x_1''=x_1'-a_{23}'x_3'-\cdots-a_{2n}'x_n',\ x_2''=x_2',\ \cdots,\ x_n''=x_n',$$

以及关于 $y_i'$ 的类似变换后，我们得到

$$b(x,y)=x_1''y_2''-x_2''y_1''-b_3(x,y),$$

其中 $b_3(x,y)$ 不包含 $x_1'',x_2'',y_1'',y_2''$. 如果 $b_3(x,y)\neq0$，我们类此地进行下去.

1867. $b(x,y)=u_1v_2-u_2v_1+u_3v_4-u_4v_3$; $u_1=x_1+3x_4$, $u_2=x_2+2x_3-x_4$, $u_3=x_3$, $u_4=6x_4$，以及 $v_i$ 用 $y_i$ 表示的同样的表达式.

1868. $b(x,y)=u_1v_2-u_2v_1+u_3v_4-u_4v_3$; $u_1=x_1-4x_4$, $u_2=x_2+2x_3$, $u_3=x_3$, $u_4=-8x_4$. 以及 $v_i$ 用 $y_i$ 表示的同样的表达式.

1869. 用矩阵术语，我们得到下列断言：实对称矩阵 $A$ 正交相似于主对角线元素全为零的矩阵的充分必要条件为 $A$ 的迹等于零.

**提示**. 当证明充分性时，用对 $n$ 的归纳证明. 当 $n>1$ 时，取任一个标准正交基底 $f_1,f_2,\cdots,f_n$. 如果它不位于锥上，则证明存在向量 $f_i,f_j$ 使 $f(f_i)>0$，$f(f_j)<0$，并把向量 $f_i+\lambda f_j$ 准化所得到的向量 $e_1$ 作为所求基底的第一个向量，其中 $\lambda$ 从条件 $f(f_i+\lambda f_j)=0$ 求出.

1870. **提示**. 利用性质：四个不相同的点形成一个平行四边形，当且仅当它们的向量径满足条件 $x_1+x_2=x_3+x_4$.

1875. $x_1=-1+3t_1-4t_2$, $x_2=2-t_1+t_2$, $x_3=t_1$, $x_4=t_2$.

1876. $x_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2$, $x_2=t_1$, $x_3=3-4t_2$, $x_4=0$, $x_5=t_2$.

1877. $3x_1-x_2-x_3=8$, $x_1-2x_2+x_4=3$, $5x_1-2x_2-x_5=7$.

1878. $x_1-4x_2+x_3+2=0$, $2x_1-3x_2-x_4+7=0$, $3x_1-5x_2-x_5+8=0$.

1882. 令 $r$ 和 $r'$ 分别是矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad 和 \quad A'=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

的秩；又令 $r_{ij}$ 和 $r'_{ij}$ 分别是矩阵 $A$ 和 $A'$ 由第 $i$ 行和第 $j$ 行所组成的矩阵的秩.

下列五种情形是可能的，对每一种情形所指出的秩的值是充分必要的：

(1) 三个平面通过一点：$r=r'=3$；

(2) 三个平面没有任何公共点，但两两相交于一直线(它们形成一个棱柱)：$r=r_{12}=r_{13}=r_{23}=2$, $r'=3$；

(3) 两个平面平行而第三个平面和它们相交：$r_{12}=1$, $r=r'_{12}=r_{13}=r_{23}=2$, $r'=3$ 以及两个类似情形；

(4) 三个平面通过一条直线：$r=r_{12}=r_{13}=r_{23}=r'=2$.

(5) 三个平面平行：$r=1$, $r'_{12}=r'_{13}=r'_{23}=r'=2$.

1883. 令 $r$ 和 $r'$ 分别是矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

的秩.

四种情形是可能的：

(1) $r=3$, $r'=4$；两直线彼此相错；

(2) $r=r'=3$；两直线相交；

(3) $r=2$, $r'=3$；两直线平行；

(4) $r=r'=2$；两直线重合.

1884. 联合方程组(1)和(2)所得到的系数矩阵和增广矩阵的秩，用 $r$ 和 $r'$ 表示.

五种情形是可能的.

(1) $r=r'=4$；两平面交于一点；

(2) $r=3$, $r'=4$；两平面彼此相错并且平行于一直线，这直线是由(1)、(2)中左端线性独立的三个方程所决定的；

(3) $r=r'=3$; 两平面相交于一直线;

(4) $r=2, r'=3$; 两平面平行;

(5) $r=r'=2$; 两平面重合.

1885. 令 $r$ 和 $r'$ 分别是矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2\cdots a_n \\ b_1 & b_2\cdots b_n \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2\cdots a_n & c \\ b_1 & b_2\cdots b_n & d \end{pmatrix}$$

的秩.

三种情形是可能的:

(1) $r=r'=2$; 两超平面相交于一个 $n-2$ 维的平面;

(2) $r=1, r'=2$; 亦即$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\neq\frac{c}{d}$, 两超平面是平行的;

(3) $r=r'=1$; 两超平面重合.

1886. **提示.** 应用习题 1874 和子空间的相应性质.

1888, 1889 和 1890. **提示.** 利用习题 1887.

1891. 如果 $\pi_1 /\!/ \pi_2$, 则 $\pi_3=\pi_1$; 如果 $\pi_1 \not\!/\!/ \pi_2$, 则 $\pi_3=a_1+(L_1+L_2)$.

1893. 令平面 $\pi_1$ 由方程组

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=c_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n=c_s \end{aligned} \tag{1}$$

给出, 而平面 $\pi_2$ 由方程组

$$\begin{aligned} &b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n=d_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &b_{t1}x_1+\cdots+b_{tn}x_n=d_t \end{aligned} \tag{2}$$

给出, 此外, 令 $r_1$, $r_1'$ 和 $r_2$, $r_2'$ 分别是组(1)和(2)的系数矩阵的秩及增广矩阵的秩. 将(1)和(2)各方程放在一起的联合方程组的系数矩阵的秩和增广矩阵的秩, 用 $r$ 和 $r'$ 表示. 为使组(1)和(2)确定出平面, 必要且充分的是每一个组都是相容的, 亦即 $r_1=r_1'$ 和 $r_2=r_2'$. 当这些条件满足时, 给定二平面是平行的充分必要条件是 $r=\max(r_1, r_2)$, $r'=r+1$.

1895. (a) 多面体 $P$ 为下列不等式组所给定: $x_1\geqslant0, x_2\geqslant0, x_3\geqslant0, x_4\geqslant0, x_1+x_3\leqslant1, x_1+x_4\leqslant1, x_2+x_3\leqslant1, x_2+x_4\leqslant1$;

(b) 三维表面是四个四棱锥：以 $D$ 为顶点的 $OABCD$，以 $E$ 为顶点的 $OABCE$，以 $A$ 为顶点的 $ODEFA$，以 $B$ 为顶点的 $ODEFB$，以及四个四面体 $ACDF$，$ACEF$，$BCDF$，$BCEF$。

**提示.** 经过每四个不在一个二维平面上的点，有一个三维平面。如果 $\Sigma a_i x_i = b$ 是这种平面的方程，并且对所有已给定点的坐标我们有 $\Sigma a_i x_i \geqslant b$ 或者 $\Sigma a_i x_i \leqslant b$，则相应的不等式是确定 $P$ 的不等式组中的一个。位于该三维平面内的所有已给点的凸闭包将是该多面体的一个三维表面。例如，点 $O, A, B, D$ 决定一个三维平面，方程是 $x_4 = 0$。对于所有的给定点，$x_4 \geqslant 0$。所以不等式 $x_4 \geqslant 0$ 是所求不等式组的成员。五个给定点 $O, A, B, C, D$ 在三维平面 $x_4 = 0$ 上，它们的凸闭包是一棱锥，这棱锥是 $P$ 的一个三维表面。正相反，四个点 $O, A, B, F$ 决定一个三维平面，方程是 $x_3 - x_4 = 0$；对于点 $D$ 我们有 $x_3 - x_4 > 0$，而对于点 $E$ 我们有 $x_3 - x_4 < 0$。于是，这个平面不导致所求的不等式，这平面不包含多面体 $P$ 的表面。为了减少所考虑的四点组数，注意到两个四点组 $OABC$ 和 $ODEF$ 是状况相同的并且位于二维平面内。

1896. (a) 多面体 $P$ 由下列不等式组所确定：$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_1 + x_4 \leqslant 1, x_2 + x_4 \leqslant 1, x_3 + x_4 \leqslant 1$。

(b) 三维表面是：立方体 $OABCDEFG$ 和六个四棱锥，它们有公共顶点 $H$：$OBCFH$，$OACEH$，$OABDH$，$ADEGH$，$BDFGH$，$CEFGH$。

1897. 五个顶点 $A(1, 1, 1)$，$B(1, 1, -2)$，$C(1, -2, 1)$，$D(-2, 1, 1)$，$E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$。多面体有六个三角形表面 $ABC$，$ABD$，$ACD$，$BCE$，$BDE$，$CDE$，并构成有公共底 $BCD$ 的两个四面体 $ABCD$ 和 $BCDE$。

1898. (a) 顶点为 $(1, 0, 0, 0)$，$(0, 1, 0, 0)$，$(0, 0, 1, 0)$，$(0, 0, 0, 1)$ 的四面体；

(b) 顶点为 $(1, 1, 0, 0)$，$(1, 0, 1, 0)$，$(1, 0, 0, 1)$，$(0, 1, 1, 0)$，$(0, 1, 0, 1)$，$(0, 0, 1, 1)$ 的八面体；

(c) 底在点 $(1, 0, 0, 0)$，$(0, 1, 0, 0)$，$(0, 0, 1, 0)$ 和 $(1, 0, 0, 1)$，$(0, 1, 0, 1)$，$(0, 0, 1, 1)$ 的三棱柱。

(d) 顶点在 $(1, 0, 1, 0)$，$(1, 0, 0, 1)$，$(0, 1, 1, 0)$，$(0, 1, 0, 1)$ 的正方形。

1899. (a) 8；(b) 28；(c) 14；(d) 2；(e) 7；(f) 4；(g) 7；(h) 6；(i) 3；(j) 3；(k) 1；(l) 6；(m) 5；(n) 12。

**提示.** 引进坐标系，并考虑直线和平面的向量形式下的参数方程。

1901. (a) $a_i=\varphi(e_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

1902. $F(\varphi)=\varphi(x), \varphi\in V_n^*$.

1904. $A'=C^*AC$，其中 $C$ 是从旧基底到新基底的转移矩阵，用列写出的.

1905. $A'=D^*AD$，其中 $D=(C^*)^{-1}$，而 $C$ 是从旧基底到新基底的转移矩阵(用列写出的).

1906. $A'=C^{-1}AC=D^*AC$，其中 $C$ 是从旧基底到新基底的转移矩阵(用列写出的)，而 $D=(C^*)^{-1}$.

1907. (b) $F(x, \varphi)=\varphi(x), x\in V_n, \varphi_{\alpha j}\in V_n^*$.

1908. **提示**. (b) 取张量 $a_{ij}b^{kl}$ 的缩并 $a_{i\alpha}b^{\alpha j}$，其中 $b^{kl}$ 是在某一基底下具有分量 $b^{kl}=a^{kl}$ 的张量. 应用习题 1907.

1913. $a'^{j_1 j_2\cdots j_q}_{i_1 i_2\cdots i_p}=a^{\pi(j_1)\pi(j_2)\cdots\pi(j_q)}_{\pi(i_1)\pi(i_2)\cdots\pi(i_p)}$.

1914. $a^{j_1 j_2\cdots j_n}_{i_1 i_2\cdots i_n}=(-1)^{s-t}$，其中 $s$ 是排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中的反序数，而 $t$ 是排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 中的反序数，如果上标和下标是不相同的；否则上述坐标是零.

1917. 它是不变量，在所有基底下等于数 0.

1918. **提示**. (a) 对本节引言所指出的每一个等价规则，验证这点.

(b) 为了证明必要性，对 $x\neq 0$，关于具有性质 $\varphi(x)\neq 0$ 的 $\varphi$，取缩并，为了证明充分性，在对 $00'$ 中写 $0=0x$ 以得到对 $x0'$；

(c) 关于 $\varphi'\in V'$ 取缩并，其中 $\varphi'$ 使得 $\varphi'(x_i')=1, \varphi'(x_j')=0 (j\neq i)$；

(d) 利用(c).

1923. (b) $g_{11}=g_{22}=1, g_{12}=g_{21}=\cos\alpha$；

(c) $g^{11}=g^{22}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$；$g^{12}=g^{21}=-\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$；

(d) $e^1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}(e_1-e_2\cos\alpha)=(1, -\cot\alpha)$，

$$e^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}(-e_1\cos\alpha+e_2)=\left(0, \frac{1}{\sin\alpha}\right)；$$

(e) $(x, y)=x^1y^1+(x^1y^2+x^2y^1)\cos\alpha+x^2y^2$，其中 $x=x^1e_1+x^2e_2$，$y=$

$y^1\boldsymbol{e}_1+y^2\boldsymbol{e}_2$;

(f) $\varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=|\sin\alpha|, \varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0$;

(g) $S=\varepsilon_{ij}x^iy^j=|\sin\alpha|\begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}$.

1924. 当变到相同定向的新基底时，$\boldsymbol{y}$ 保持不变，但是如果定向改变，则方向改变．向量 $\boldsymbol{y}$ 是由 $\boldsymbol{x}$ 进行旋转得到的，这旋转是：关于基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 的定向在负方向上转过角$\frac{\pi}{2}$.

**提示**．当决定 $\boldsymbol{y}$ 对基底的依赖性时，利用张量方程的不变性．为了确定 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的几何关系，考虑标准正交基底．

1925. 当变到相同定向的新基底时，$b_{ij}$ 的变化象二阶共变张量的分量一样．当变到相反定向的基底时，$b_{ij}$ 也变号．

1926. $a_{ijk}=g_{i\alpha}g_{j\beta}a_k^{\alpha\beta}(i, j, k=1, 2, \cdots, n)$.

**提示**．用 $g_{i\alpha'}g_{j\beta'}$，关于 $i$ 和 $j$，缩并题中所给等式的两端，利用关系 $g_{i\alpha'}g^{i\alpha}=\delta_{\alpha'}^{\alpha}$，然后把记号 $i, j$ 变为 $\alpha, \beta$，而 $\alpha', \beta'$ 变为 $i, j$.

1928. $S=\frac{3}{2}, h=1$．**提示**．用公式 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ 求面积，或者利用习题 1935.

1929. $Q(-4, 2, 0)$．提示．用反变分量写出直线 $PQ$ 的参数方程．

1930. **提示**．当证明(b)时，取标准正交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$．其中 $\boldsymbol{e}_1$ 的方向沿着 $\boldsymbol{u}$，而 $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ 在 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 所在的三维平面内，并且有相同的定向，利用有向体积的公式(17)和(18)（参看本节引言）．

1931. 不变量，在任何基底下等于数 $n$.

1933. 6.

1934. (b)

$$G_1=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

(c) $\left(\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right)$，正负号不计．

1935. **提示**．第一个方法：取已给各向量作为基底；第二个方法：选取

一个标准正交基底.

1937. $d=\left|\frac{\sin\omega(ax_0+by_0+c)}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}\right|$. **提示.** 利用习题 1936.

1938. **提示.** 变到有相同定向的标准正交基底.